12 CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Página 337

REFLEXIONA Y RESUELVE

Concepto de primitiva

■ **NÚMEROS Y POTENCIAS SENCILLAS**

1 a) $\int 1\,dx = x$ b) $\int 2\,dx = 2x$ c) $\int \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}x$

2 a) $\int 2x\,dx = x^2$ b) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$ c) $\int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2}$

3 a) $\int 7x\,dx = \frac{7x^2}{2}$ b) $\int \frac{x}{3}\,dx = \frac{x^2}{6}$ c) $\int \sqrt{2}x\,dx = \frac{\sqrt{2}x^2}{2}$

4 a) $\int 3x^2\,dx = x^3$ b) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$ c) $\int 2x^2\,dx = \frac{2x^3}{3}$

5 a) $\int 6x^5\,dx = x^6$ b) $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6}$ c) $\int 3x^5\,dx = \frac{3x^6}{6} = \frac{x^6}{2}$

■ **POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO**

6 a) $\int (-1)\,x^{-2}\,dx = x^{-1} = \frac{1}{x}$

b) $\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x}$

c) $\int \frac{5}{x^2}\,dx = \frac{-5}{x}$

7 a) $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2x^2}$

b) $\int \frac{2}{x^3}\,dx = 2\int \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{-2}{2x^2} = \frac{-1}{x^2}$

8 a) $\int \frac{1}{(x-3)^3}\,dx = \int (x-3)^{-3}\,dx = \frac{(x-3)^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2(x-3)^2}$

b) $\int \frac{5}{(x-3)^3}\,dx = 5\int \frac{1}{(x-3)^3}\,dx = \frac{-5}{2(x-3)^2}$

LAS RAÍCES TAMBIÉN SON POTENCIAS

9 a) $\int \frac{3}{2}x^{1/2}\,dx = x^{3/2} = \sqrt{x^3}$

b) $\int \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = \int \frac{3}{2}x^{1/2}\,dx = x^{3/2} = \sqrt{x^3}$

10 a) $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{3}{2}x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

b) $\int 7\sqrt{x}\,dx = 7\int \sqrt{x}\,dx = \frac{14}{3}\sqrt{x^3}$

11 a) $\int \sqrt{3x}\,dx = \int \sqrt{3}\cdot\sqrt{x}\,dx = \int \sqrt{3}\,\sqrt{x}\,dx = \sqrt{3}\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3}$

b) $\int \frac{\sqrt{2x}}{5}\,dx = \int \frac{\sqrt{2}}{5}\sqrt{x}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{5}\int \sqrt{x}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2\sqrt{2}}{15}\sqrt{x^3} = \frac{2\sqrt{2x^3}}{15}$

12 a) $\int \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx = x^{1/2} = \sqrt{x}$

b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}$

13 a) $\int \frac{3}{2\sqrt{x}}\,dx = 3\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 3\sqrt{x}$

b) $\int 5\sqrt{x^3}\,dx = 5\int x^{3/2}\,dx = 5\,\frac{x^{5/2}}{5/2} = 2\sqrt{x^5}$

14 a) $\int \frac{3}{\sqrt{5x}}\,dx = \int \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{6}{5}\sqrt{5x}$

b) $\int \sqrt{7x^3}\,dx = \sqrt{7}\int \sqrt{x^3}\,dx = \frac{2}{5}\sqrt{7x^5}$

¿RECUERDAS QUE $D(\ln x) = 1/x$?

15 a) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

b) $\int \frac{1}{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{5x}\,dx = \frac{1}{5}\ln|5x|$

16 a) $\displaystyle\int \frac{1}{x+5}\,dx = ln\,|x+5|$

b) $\displaystyle\int \frac{3}{2x+6}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x+6}\,dx = \frac{3}{2}\,ln\,|2x+6|$

ALGUNAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

17 a) $\displaystyle\int cos\,x\,dx = sen\,x$

b) $\displaystyle\int 2\,cos\,x\,dx = 2\,sen\,x$

18 a) $\displaystyle\int cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx = sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

b) $\displaystyle\int cos\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,cos\,2x\,dx = \frac{1}{2}\,sen\,2x$

19 a) $\displaystyle\int (-sen\,x)\,dx = cos\,x$

b) $\displaystyle\int sen\,x\,dx = -cos\,x$

20 a) $\displaystyle\int sen(x-\pi)\,dx = -cos\,(x-\pi)$

b) $\displaystyle\int sen\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,sen\,2x\,dx = \frac{-1}{2}\,cos\,2x$

21 a) $\displaystyle\int (1+tg^2\,2x)\,dx = \frac{1}{2}\int 2(1+tg^2\,2x)\,dx = \frac{1}{2}\,tg\,2x$

b) $\displaystyle\int tg^2\,2x\,dx = \int (1+tg^2\,2x-1)\,dx = \int (1+tg^2\,2x)\,dx - \int 1\,dx = \frac{1}{2}\,tg\,2x - x$

ALGUNAS EXPONENCIALES

22 a) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$

b) $\displaystyle\int e^{x+1}\,dx = e^{x+1}$

23 a) $\displaystyle\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{2x}$

b) $\displaystyle\int e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+1}$

Página 339

1. **Calcula las siguientes integrales:**

a) $\int 7x^4\, dx$

b) $\int \frac{1}{x^2}\, dx$

c) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x}\, dx$

d) $\int \frac{x^3}{x-2}\, dx$

e) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x+1}\, dx$

f) $\int \sqrt{x}\, dx$

g) $\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2}\, dx$

h) $\int \sqrt[3]{5x^2}\, dx$

i) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}\, dx$

j) $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}}\, dx$

a) $\int 7x^4\, dx = 7 \cdot \frac{x^5}{5} + k = \frac{7x^5}{5} + k$

b) $\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + k = \frac{-1}{x} + k$

c) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x}\, dx = \int \left(x^3 - 5x + 3 - \frac{4}{x}\right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} + 3x - 4\, ln\,|x| + k$

d) $\int \frac{x^3}{x-2}\, dx = \int \left(x^2 + 2x + 4 + \frac{8}{x-2}\right) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8\, ln\,|x-2| + k$

e) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x+1}\, dx = \int \left(x^3 - x^2 - 4x + 7 - \frac{11}{x+1}\right) dx =$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 7x - 11\, ln\,|x+1| + k$

f) $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2}\, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + k$

g) $\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2}\, dx = \int \left(\frac{7x^4}{x^2}\right) dx - \int \left(\frac{5x^2}{x^2}\right) dx + \int \left(\frac{3x}{x^2}\right) dx - \int \left(\frac{4}{x^2}\right) dx =$

$= \int 7x^2\, dx - \int 5\, dx + \int \frac{3}{x}\, dx - \int \frac{4}{x^2}\, dx =$

$= \frac{7x^3}{3} - 5x + 3\, ln\,|x| + \frac{4}{x} + k$

h) $\int \sqrt[3]{5x^2}\, dx = \int \sqrt[3]{5}\, x^{2/3}\, dx = \sqrt[3]{5} \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{5x^5}}{5} + k$

i) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}\, dx = \int \frac{x^{1/3}}{3x}\, dx + \int \frac{\sqrt{5}\, x^{3/2}}{3x}\, dx = \frac{1}{3}\int x^{-2/3}\, dx + \frac{\sqrt{5}}{3}\int x^{1/2}\, dx =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{1/3}}{1/3} + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt{5x^3}}{9} + k$

j) $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}}\, dx = \int \frac{\sqrt{5} \cdot x^{3/2}}{\sqrt[3]{3} \cdot x^{1/3}}\, dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}}\int x^{7/6}\, dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{x^{13/6}}{13/6} + k = \frac{6\sqrt{5}\,\sqrt[6]{x^{13}}}{13\sqrt[3]{3}} + k$

Página 340

2. **a)** $\int (3x - 5\, tg\, x)\, dx = 3\int x\, dx - 5\int tg\, x\, dx = \frac{3x^2}{2} - 5\,(-\ln|\cos x|) + k =$

$= \frac{3x^2}{2} + 5 \ln|\cos x| + k$

b) $\int (5 \cos x + 3^x)\, dx = 5\int \cos x\, dx + \int 3^x\, dx = 5\, sen\, x + \frac{3^x}{\ln 3} + k$

c) $\int (3\, tg\, x - 5 \cos x)\, dx = 3\int tg\, x\, dx - 5\int \cos x\, dx = 3\,(-\ln|\cos x|) - 5\, sen\, x + k =$

$= -3 \ln|\cos x| - 5\, sen x + k$

d) $\int (10^x - 5^x)\, dx = \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{5^x}{\ln 5} + k$

3. **a)** $\int \frac{3}{x^2 + 1}\, dx = 3\, arctg\, x + k$

b) $\int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx = \ln|x^2 + 1| + k$

c) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\, dx = \int \left(1 + \frac{-2}{x^2 + 1}\right) dx = x - 2\, arctg\, x + k$

d) $\int \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1}\, dx = \int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}\, dx = \int \left(1 + \frac{2x}{x^2 + 1}\right) dx = x + \ln|x^2 + 1| + k$

Página 342

1. Calcula:

a) $\int \cos^4 x \ sen\ x\ dx$ **b)** $\int 2^{sen\ x} \cos x\ dx$

a) $\int \cos^4 x\ sen\ x\ dx = -\int \cos^4 x(-sen\ x)\ dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + k$

b) $\int 2^{sen\ x} \cos x\ dx = \frac{1}{ln\ 2}\int 2^{sen\ x} \cos x \cdot ln\ 2\ dx = \frac{2^{sen\ x}}{ln\ 2} + k$

2. Calcula:

a) $\int cotg\ x\ dx$ **b)** $\int \frac{5x}{x^4+1}dx$

a) $\int cotg\ x\ dx = \int \frac{\cos x}{sen\ x}\ dx = ln\ |sen\ x| + k$

b) $\int \frac{5x}{x^4+1}\ dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\ dx = \frac{5}{2}\ arc\ tg\ (x^2) + k$

Página 343

1. Calcula: $\int x\ sen\ x\ dx$

Llamamos $I = \int x\ sen\ x\ dx$.

$$\left.\begin{array}{l} u = x,\ \ du = dx \\ dv = sen\ x\ dx,\ \ v = -\cos x \end{array}\right\}\ I = -x\cos x + \int \cos x\ dx = -x \cos x + sen\ x + k$$

2. Calcula: $\int x\ arc\ tg\ x\ dx$

Llamamos $I = \int x\ arc\ tg\ x\ dx$.

$$\left.\begin{array}{l} u = arc\ tg\ x,\ \ du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = x\ dx,\ \ v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{x^2}{2}\ arc\ tg\ x - \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2}\ arc\ tg\ x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ arc\ tg\ x - \frac{1}{2}[x - arc\ tg\ x] + k = \frac{x^2}{2}\ arc\ tg\ x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ arc\ tg\ x + k =$$

$$= \frac{x^2+1}{2}\ arc\ tg\ x - \frac{1}{2}x + k$$

Página 344

3. Calcula: $\displaystyle\int x^4 e^x\, dx$

$I = \displaystyle\int x^4 e^x\, dx$

Resolvámosla integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^4 \;\to\; du = 4x^3\, dx \\ dv = e^x\, dx \;\to\; v = e^x \end{array}\right\}$$

$I = x^4 e^x - \displaystyle\int e^x 4x^3\, dx = x^4 e^x - 4\int x^3 e^x\, dx$

$I_1 = \displaystyle\int x^3 e^x\, dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x$

(Visto en el ejercicio resuelto 2 de la página 344)

$I = x^4 e^x - 4[x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x] + k =$

$= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24xe^x + 24e^x + k$

4. Calcula: $\displaystyle\int sen^2\, x\, dx$

$I = \displaystyle\int sen^2\, x\, dx$

Resolvámosla integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = sen\, x \;\to\; du = cos\, x\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \;\to\; v = -cos\, x \end{array}\right\}$$

$I = -sen\, x\, cos\, x - \displaystyle\int (-cos\, x) cos\, x\, dx = -sen\, x\, cos\, x + \int cos^2\, x\, dx =$

$= -sen\, x\, cos\, x + \displaystyle\int (1 - sen^2\, x)\, dx = -sen\, x\, cos\, x + \int dx - \int sen^2\, x\, dx =$

$= -sen\, x\, cos\, x + x - \displaystyle\int sen^2\, x\, dx$

Es decir:

$I = -sen\, x\, cos\, x + x - I \;\to\; 2I = -sen\, x\, cos\, x + x \;\to\; I = \dfrac{x - sen\, x\, cos\, x}{2} + k$

Página 345

1. Calcula: $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 4}\, dx$

$\displaystyle\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 4}\, dx = \int \left(3x + 7 + \frac{29}{x - 4}\right) dx = \frac{3x^2}{2} + 7x + 29\, ln\, |x - 4| + k$

2. Calcula: $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 1}\, dx$

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 1}\, dx = \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{13}{4} + \frac{17/4}{2x + 1} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{13}{4}x - \frac{17}{8}\, ln\, |2x + 1| + k =$$

$$= \frac{3x^2}{4} - \frac{13}{4}x - \frac{17}{8}\, ln\, |2x + 1| + k$$

Página 348

3. Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{5x - 3}{x^3 - x}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x + 6}{(x - 1)^3}\, dx$

a) Descomponemos la fracción:

$$\frac{5x - 3}{x^3 - x} = \frac{5x - 3}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}$$

$$\frac{5x - 3}{x^3 - x} = \frac{A(x - 1)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1)}{x(x - 1)(x + 1)}$$

$$5x - 3 = A(x - 1)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1)$$

Hallamos A, B y C dando a x los valores 0, 1 y –1:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = 0 & \Rightarrow & -3 = -A & \Rightarrow & A = 3 \\ x = 1 & \Rightarrow & 2 = 2B & \Rightarrow & B = 1 \\ x = -1 & \Rightarrow & -8 = 2C & \Rightarrow & C = -4 \end{array}\right\}$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{5x - 3}{x^3 - x}\, dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x - 1} - \frac{4}{x + 1} \right) dx = 3\, ln|x| + ln|x - 1| - 4\, ln|x - 1| + k$$

b) Descomponemos la fracción:

$$\frac{x^2 - 2x + 6}{(x - 1)^3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3} = \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 1) + C}{(x - 1)^3}$$

$$x^2 - 2x + 6 = A(x - 1)^2 + B(x - 1) + C$$

Dando a x los valores 1, 0 y 2, queda:

$$\left.\begin{array}{lll} x = 1 & \Rightarrow & 5 = C \\ x = 0 & \Rightarrow & 6 = A - B + C \\ x = 2 & \Rightarrow & 6 = A + B + C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 5 \end{array}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2 - 2x + 6}{(x - 1)^3}\, dx = \int \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{5}{(x - 1)^3} \right) dx = ln|x - 1| - \frac{5}{2(x - 1)^2} + k$$

4. Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^4 - 4x^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x}\, dx$

a) $x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^2(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 2} + \frac{D}{x + 2}$$

$$\frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^2(x - 2)(x + 2)} =$$

$$= \frac{Ax(x - 2)(x + 2) + B(x - 2)(x + 2) + Cx^2(x + 2) + Dx^2(x - 2)}{x^2(x - 2)(x + 2)}$$

$$x^3 + 22x^2 - 12x + 8 = Ax(x - 2)(x + 2) + B(x - 2)(x + 2) + Cx^2(x + 2) + Dx^2(x - 2)$$

Hallamos A, B, C y D dando a x los valores 0, 2, –2 y 1:

$$\left.\begin{array}{llllll} x = 0 & \Rightarrow & 8 = -4B & \Rightarrow & B = -2 & \\ x = 2 & \Rightarrow & 80 = 16C & \Rightarrow & C = 5 & \\ x = -2 & \Rightarrow & 112 = -16D & \Rightarrow & D = -7 & \\ x = 1 & \Rightarrow & 19 = -3A - 3B + 3C - D & \Rightarrow & -3A = -9 & \Rightarrow \quad A = 3 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^4 - 4x^2}\, dx = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x - 2} - \frac{7}{x + 2} \right) dx =$$

$$= 3\, ln|x| + \frac{2}{x} + 5\, ln|x - 2| - 7\, ln|x + 2| + k$$

b) La fracción se puede simplificar:

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x} = \frac{x(x - 2)^2}{x(x - 2)^2(x + 2)} = \frac{1}{x + 2}$$

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x}\, dx = \int \frac{1}{x + 2}\, dx = ln|x + 2| + k$$

Página 356

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Integrales casi inmediatas

1 **Calcula las siguientes integrales inmediatas:**

a) $\int (4x^2 - 5x + 7)\,dx$ **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$

c) $\int \frac{1}{2x + 7}\,dx$ **d)** $\int (x - sen\ x)\,dx$

a) $\int (4x^2 - 5x + 7)\,dx = \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + k$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = \int x^{-1/5}\,dx = \frac{x^{4/5}}{4/5} + k = \frac{5\sqrt[5]{x^4}}{4} + k$

c) $\int \frac{1}{2x + 7}\,dx = \frac{1}{2}\,ln|2x + 7| + k$

d) $\int (x - sen\ x)\,dx = \frac{x^2}{2} + cox\ x + k$

2 **Resuelve estas integrales:**

a) $\int (x^2 + 4x)\,(x^2 - 1)\,dx$ **b)** $\int (x - 1)^3\,dx$

c) $\int \sqrt{3x}\,dx$ **d)** $\int (sen\ x + e^x)\,dx$

a) $\int (x^2 + 4x)\,(x^2 - 1)\,dx = \int (x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x)\,dx = \frac{x^5}{5} + x^4 - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + k$

b) $\int (x - 1)^3\,dx = \frac{(x - 1)^4}{4} + k$

c) $\int \sqrt{3x}\,dx = \int \sqrt{3}\,x^{1/2}\,dx = \sqrt{3}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3} + k$

d) $\int (sen\ x + e^x)\,dx = -cos\ x + e^x + k$

s3 Calcula las integrales siguientes:

a) $\int \sqrt[3]{\frac{x}{2}}\,dx$ **b)** $\int sen\,(x-4)\,dx$

c) $\int \frac{7}{\cos^2 x}\,dx$ **d)** $\int (e^x + 3e^{-x})\,dx$

a) $\int \sqrt[3]{\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int x^{1/3}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{x^{4/3}}{4/3} + k = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{x^4}{2}} + k$

b) $\int sen\,(x-4)\,dx = -\cos(x-4) + k$

c) $\int \frac{7}{\cos^2 x}\,dx = 7\,tg\,x + k$

d) $\int (e^x + 3e^{-x})\,dx = e^x - 3e^{-x} + k$

s4 Halla estas integrales:

a) $\int \frac{2}{x}\,dx$ **b)** $\int \frac{dx}{x-1}$ **c)** $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$ **d)** $\int \frac{3}{1+x^2}\,dx$

a) $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\,ln|x| + k$

b) $\int \frac{dx}{x-1} = ln|x-1| + k$

c) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-3/2}\right) dx = ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + k$

d) $\int \frac{3}{1+x^2}\,dx = 3\,arc\,tg\,x + k$

5 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x-4}$ **b)** $\int \frac{dx}{(x-4)^2}$ **c)** $\int (x-4)^2\,dx$ **d)** $\int \frac{dx}{(x-4)^3}$

a) $\int \frac{dx}{x-4} = ln|x-4| + k$

b) $\int \frac{dx}{(x-4)^2} = \frac{-1}{(x-4)} + k$

c) $\int (x-4)^2\,dx = \frac{(x-4)^3}{3} + k$

d) $\int \frac{dx}{(x-4)^3} = \int (x-4)^{-3}\,dx = \frac{(x-4)^{-2}}{-2} + k = \frac{-1}{2(x-4)^2} + k$

6 **Halla las siguientes integrales del tipo exponencial:**

a) $\int e^{x-4}\,dx$ **b)** $\int e^{-2x+9}\,dx$

c) $\int e^{5x}\,dx$ **d)** $\int (3^x - x^3)\,dx$

a) $\int e^{x-4}\,dx = e^{x-4} + k$

b) $\int e^{-2x+9}\,dx = \frac{-1}{2}\int -2e^{-2x+9}\,dx = \frac{-1}{2}e^{-2x+9} + k$

c) $\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x} + k$

d) $\int (3^x - x^3)\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x^4}{4} + k$

7 **Resuelve las siguientes integrales del tipo arco tangente:**

a) $\int \frac{2\,dx}{1+9x^2}$ **b)** $\int \frac{5\,dx}{4x^2+1}$ **c)** $\int \frac{4\,dx}{3+3x^2}$ **d)** $\int \frac{dx}{4+x^2}$

a) $\int \frac{2\,dx}{1+9x^2} = \frac{2}{3}\int \frac{3\,dx}{1+(3x)^2} = \frac{2}{3}\,arc\ tg\,(3x) + k$

b) $\int \frac{5\,dx}{4x^2+1} = \frac{5}{2}\int \frac{2\,dx}{(2x)^2+1} = \frac{5}{2}\,arc\ tg\,(2x) + k$

c) $\int \frac{4\,dx}{3+3x^2} = \int \frac{4\,dx}{3(1+x^2)} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{4}{3}\,arc\ tg\,x + k$

d) $\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{1/4}{1+(x/2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{1+(x/2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,arc\ tg\left(\frac{x}{2}\right) + k$

8 **Expresa el integrando de las siguientes integrales de la forma:**

$$\frac{\textbf{dividendo}}{\textbf{divisor}} = \textbf{cociente} + \frac{\textbf{resto}}{\textbf{divisor}}$$

y resuélvelas:

a) $\int \frac{x^2-5x+4}{x+1}\,dx$ **b)** $\int \frac{2x^2+2x+4}{x+1}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^3-3x^2+x-1}{x-2}\,dx$

a) $\int \frac{x^2-5x+4}{x+1}\,dx = \int \left(x - 6 + \frac{10}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 6x + 10\ln|x+1| + k$

b) $\int \frac{x^2+2x+4}{x+1}\,dx = \int \left(x + 1 + \frac{3}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x+1| + k$

c) $\int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x - 2}\, dx = \int \left(x^2 - x - 1 - \frac{3}{x-2}\right) dx =$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - 3\, ln|x - 2| + k$$

9 **Halla estas integrales sabiendo que son del tipo arco seno:**

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$ **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ **c)** $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\, dx$ **d)** $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (ln\, x)^2}}$ **(*)**

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2\, dx}{\sqrt{1 - (2x)^2}} = \frac{1}{2}\, arc\ sen\ (2x) + k$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{1/2\, dx}{\sqrt{1 - (x/2)^2}} = arc\ sen \left(\frac{x}{2}\right) + k$

c) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\, dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1 - (e^x)^2}}\, dx = arc\ sen\ (e^x) + k$

d) (*) En el libro debería decir: $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - (ln\, x)^2}}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - (ln\, x)^2}} = \int \frac{1/x\, dx}{\sqrt{1 - (ln\, x)^2}} = arc\ sen\ (ln\, |x|) + k$$

Integrales de la forma $\int f(x)^n \cdot f'(x)\, dx$

10 **Resuelve las integrales siguientes:**

a) $\int cos\, x\ sen^3\, x\, dx$ **b)** $\int \frac{3}{(x+1)^2}\, dx$

c) $\int \frac{x\, dx}{(x^2 + 3)^5}$ **d)** $\int \frac{1}{x}\, ln^3\, x\, dx$

a) $\int cos\, x\ sen^3\, x\, dx = \frac{sen^4\, x}{4} + k$

b) $\int \frac{3}{(x+1)^2}\, dx = 3\int (x+1)^{-2}\, dx = 3 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \frac{-3}{x+1} + k$

c) $\int \frac{x\, dx}{(x^2+3)^5} = \frac{1}{2} \quad 2x(x^2+3)^{-5}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+3)^{-4}}{-4} + k = \frac{-1}{8(x^2+3)^4} + k$

d) $\int \frac{1}{x}\, ln^3\, x\, dx = \frac{ln^4|x|}{4} + k$

11 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int sen\ x\ cos\ x\ dx$

b) $\int \frac{sen\ x\ dx}{cos^5\ x}$

c) $\int \frac{2x\ dx}{\sqrt{9-x^2}}$

d) $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{x^2+5}}$

a) $\int sen\ x\ cos\ x\ dx = \frac{sen^2\ x}{2} + k$

b) $\int \frac{sen\ x\ dx}{cos^5\ x} = -\int (-sen\ x) \cdot cos^{-5}\ x\ dx = \frac{-cos^{-4}\ x}{-4} + k = \frac{1}{4\ cos^4\ x} + k$

c) $\int \frac{2x\ dx}{\sqrt{9-x^2}} = -\int -2x(9-x^2)^{-1/2}\ dx = -\frac{(9-x^2)^{1/2}}{1/2} + k = -2\sqrt{9-x^2} + k$

d) $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+5)^{-1/2}\ dx = \frac{1}{2}\ \frac{(x^2+5)^{1/2}}{1/2} = \sqrt{x^2+5} + k$

12 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int \sqrt{x^2-2x}\ (x-1)\ dx$

b) $\int \frac{arc\ sen\ x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

c) $\int \frac{(1+ln\ x)^2}{x}\ dx$

d) $\int \sqrt{(1+cos\ x)^3}\ sen\ x\ dx$

a) $\int \sqrt{x^2-2x}\ (x-1)\ dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-2x}\ (2x-2)\ dx =$

$= \frac{1}{2}\int (x^2-2x)^{1/2}\ (2x-2)\ dx =$

$= \frac{1}{2}\ \frac{(x^2-2x)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{\sqrt{(x^2-2x)^3}}{3} + k$

b) $\int \frac{arc\ sen\ x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ arc\ sen\ x\ dx = \frac{arc\ sen^2\ x}{2} + k$

c) $\int \frac{(1+ln\ x)^2}{x}\ dx = \int (1+ln\ x)^2 \cdot \frac{1}{x}\ dx = \frac{(1+ln\ x)^3}{3} + k$

d) $\int \sqrt{(1+cos\ x)^3}\ sen\ x\ dx = -\int (1+cos\ x)^{3/2}\ (-sen\ x)dx =$

$= -\frac{(1+cos\ x)^{5/2}}{5/2} + k = \frac{-2\sqrt{(1+cos\ x)^5}}{5} + k$

Página 357

Integración por partes

s13 **Aplica la integración por partes para resolver las siguientes integrales:**

a) $\int x \ln x \, dx$ **b)** $\int x e^{2x} \, dx$

c) $\int 3x \cos x \, dx$ **d)** $\int \ln(2x-1) \, dx$

e) $\int \frac{x}{e^x} \, dx$ **f)** $\int \text{arc tg } x \, dx$

g) $\int \text{arc cos } x \, dx$ **h)** $\int x^2 \ln x \, dx$

a) $\int x \ln x \, dx$

$$\begin{cases} u = \ln x \;\rightarrow\; du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x\,dx \;\rightarrow\; v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{x^2}{4} + k$$

b) $\int x e^{2x} \, dx$

$$\begin{cases} u = x \;\rightarrow\; du = dx \\ dv = e^{2x} dx \;\rightarrow\; v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\int xe^{2x} \, dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + k$$

c) $\int 3x \cos x \, dx = 3\int x \cos x \, dx$

$$\begin{cases} u = x \;\rightarrow\; du = dx \\ dv = \cos x \, dx \;\rightarrow\; v = \text{sen } x \end{cases}$$

$$3\int x \cos x \, dx = 3\left[x \text{ sen } x - \int \text{sen } x \, dx\right] = 3[x \text{ sen } x + \cos x] + k =$$

$$= 3x \text{ sen } x + 3\cos x + k$$

d) $\int \ln(2x-1) \, dx$

$$\begin{cases} u = \ln 2x - 1 \;\rightarrow\; du = \frac{2}{2x-1} \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{cases}$$

$$\int ln(2x-1)\,dx = x\,ln\,(2x-1) - \int \frac{2x}{2x-1}\,dx =$$

$$= x\,ln\,(2x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{2x-1}\right) dx =$$

$$= x\,ln\,(2x-1) - x - \frac{1}{2}\,ln\,(2x-1) + k$$

e) $\int \frac{x}{e^x}\,dx$

$$\begin{cases} u = x \;\rightarrow\; du = dx \\ dv = e^{-x\,dx} \;\rightarrow\; v = -e^{-x}\,dx \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{e^x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + k$$

f) $\int arc\;tg\;x\,dx$

$$\begin{cases} u = arc\;tg\;x \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{cases}$$

$$\int arc\;tg\;x = x\,arc\;tg\;x - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x\,arc\;tg\;x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\,arc\;tg\;x - \frac{1}{2}\,ln\,(1+x^2) + k$$

g) $\int arc\;cos\;x\,dx$

$$\begin{cases} u = arc\;cos\;x \;\rightarrow\; du = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{cases}$$

$$\int arc\;cos\;x\,dx = x\,arc\;cos\;x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,arc\;cos\;x - \sqrt{1-x^2} + k$$

h) $\int x^2\,ln\,x\,dx$

$$\begin{cases} u = ln\,x \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = x^2\,dx \;\rightarrow\; v = \dfrac{x^3}{2} \end{cases}$$

$$\int x^2\,ln\,x\,dx = \frac{x^3\,ln\,x}{3} - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3\,ln\,x}{3} - \frac{x^3}{9} + k$$

14 **Resuelve las siguientes integrales aplicando dos veces la integración por partes:**

a) $\int x^2 \, sen\, x \, dx$ **b)** $\int x^2 e^{2x} dx$

c) $\int e^x \, sen\, x \, dx$ **d)** $\int (x+1)^2 e^x dx$

a) $\int x^2 \, sen\, x \, dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \rightarrow v = -cos\, x \end{cases}$$

$$\int x^2 \, sen\, x\, dx = -x^2 \, cos\, x + \int 2x\, cos\, x\, dx = -x^2\, cos\, x + 2\underbrace{\int x\, cos\, x\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \rightarrow du_1 = dx \\ dv_1 = cos\, x\, dx \rightarrow v_1 = sen\, x \end{cases}$$

$$I_1 = x\, sen\, x - \int sen\, x\, dx = x\, sen\, x + cos\, x$$

Por tanto:

$$\int x^2 \, sen\, x\, dx = -x^2\, cos\, x + 2x\, sen\, x + 2\, cos\, x + k$$

b) $\int x^2 e^{2x} dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x\, dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \underbrace{\int x\, e^{2x} dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \rightarrow du_1 = dx \\ dv_1 = e^{2x} dx \rightarrow v_1 = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

Por tanto:

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + k = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + k$$

c) $\int e^x sen\, x\, dx$

$$\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \rightarrow v = -cos\, x \end{cases}$$

$$\int e^x\, sen\, x\, dx = -e^x\, cos\, x + \underbrace{\int e^x\, cos\, x\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = e^x \rightarrow du_1 = e^x\, dx \\ dv_1 = cos\, x\, dx \rightarrow v_1 = sen\, x \end{cases}$$

$$I_1 = e^x\, sen\, x - \int e^x\, sen\, x\, dx$$

Por tanto:

$$\int e^x\, sen\, x\, dx = -e^x\, cos\, x + e^x\, sen\, x - \int e^x\, sen\, x\, dx$$

$$2\int e^x\, sen\, x\, dx = e^x\, sen\, x - e^x\, cos\, x$$

$$\int e^x\, sen\, x\, dx = \frac{e^x\, sen\, x - e^x\, cos\, x}{2} + k$$

d) $\int (x + 1)^2\, e^x\, dx$

$$\begin{cases} u = (x + 1)^2 \rightarrow du = 2(x + 1)\, dx \\ dv = e^x\, dx \rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\int (x + 1)^2\, e^x\, dx = (x + 1)^2\, e^x - 2\underbrace{\int (x + 1)\, e^x\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = (x + 1) \rightarrow du_1 = dx \\ dv_1 = e^x\, dx \rightarrow v_1 = e^x \end{cases}$$

$$I_1 = (x + 1)\, e^x - \int e^x\, dx = (x + 1)\, e^x - e^x = (x + 1 - 1)\, e^x = x\, e^x$$

Por tanto:

$$\int (x + 1)^2\, e^x\, dx = (x + 1)^2\, e^x - 2x\, e^x + k =$$

$$= (x^2 + 2x + 1 - 2x)\, e^x + k = (x^2 + 1)\, e^x + k$$

Integrales racionales

15 **Aplica la descomposición en fracciones simples para resolver las siguientes integrales:**

a) $\int \frac{1}{x^2 + x - 6}\, dx$ **b)** $\int \frac{3x^3}{x^2 - 4}\, dx$

c) $\int \frac{1}{x^3 - 4x^2 - 25x + 100}\, dx$ **d)** $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + x}\, dx$

e) $\int \frac{4}{x^2 + x - 2}\, dx$ **f)** $\int \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3}\, dx$

g) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2}\, dx$ **h)** $\int \frac{-16}{x^2 - 2x - 15}\, dx$

a) $\int \frac{1}{x^2 + x - 6}\, dx$

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 2} \quad \begin{cases} A = -1/5 \\ B = 1/5 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 6}\, dx = \int \frac{-1/5}{x + 3}\, dx + \int \frac{1/5}{x - 2}\, dx = -\frac{1}{5}\, ln\, |x + 3| + \frac{1}{5}\, ln\, |x - 2| + k$$

b) $\int \frac{3x^3}{x^2 - 4}\, dx$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 & x^2 - 4 \\ \hline -3x^3 + 12x & 3x \\ \hline \quad 12x & \end{array}$$

$$\frac{3x^3}{x^2 - 4} = 3x + \frac{12x}{x^2 - 4}$$

$$\int \frac{3x^3}{x^2 - 4}\, dx = \int \left(3x + \frac{12x}{x^2 - 4}\right) dx = \frac{3x^2}{2} + 6\, ln\, |x^2 - 4| + k$$

c) $\int \frac{1}{x^3 - 4x^2 - 25x + 100}$

$x^3 - 4x^2 - 25x + 100 = 0$

	1	–4	–25	100
5		5	5	–100
	1	1	–20	0

$$x^2 + x - 20 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} \quad \begin{cases} x = -5 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^3 - 4x^2 - 25x + 100} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 5} + \frac{C}{x - 4} \;\rightarrow\; A = \frac{1}{10},\; B = \frac{1}{90},\; C = -\frac{1}{9}$$

$$\int \frac{1}{x^3 - 4x^2 - 25x + 100}\, dx = \frac{1}{10}\, ln\, |x - 5| + \frac{1}{90}\, ln\, |x + 5| - \frac{1}{9}\, ln\, |x - 4| + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + x}\, dx$

Por el mismo procedimiento:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + x} = 1 + \frac{-x + 1}{x^2 + x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x + 1}$$

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + x}\, dx = x + ln\,|x| - 2ln\,|x + 1| + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2 + x - 2}\, dx$

$$\frac{4}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1} \;\to\; A = -\frac{4}{3},\;\; B = \frac{4}{3}$$

$$\int \frac{4}{x^2 + x - 2}\, dx = -\frac{4}{3}\, ln\,|x + 2| + \frac{4}{3}\, ln\,|x - 1| + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3}\, dx$

$$\frac{x^2}{x^2 + 4x + 3} = 1 - \frac{4x + 3}{x^2 + 4x + 3} = 1 - \left(\frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x + 1}\right) \;\to\; A = \frac{9}{2},\;\; B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3}\, dx = \int \left[1 - \left(\frac{9/2}{x + 3} + \frac{-1/2}{x + 1}\right)\right] dx =$$

$$= x - \frac{9}{2}\, ln\,|x + 3| + \frac{1}{2}\, ln\,|x + 1| + k$$

g) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2}\, dx$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2} = x + 1 + \frac{2x - 3}{(x - 2)(x - 1)} = x + 1 + \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2}\, dx = \int \left(x + 1 + \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x - 1}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + ln\,|x - 2| + ln\,|x - 1| + k$$

h) Análogamente:

$$\int \frac{-16}{x^2 - 2x - 15}\, dx = \int \left(\frac{-2}{x - 5} + \frac{2}{x + 3}\right) dx = -2ln\,|x - 5| + 2ln\,|x + 3| + k$$

16 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)}\,dx$ **b)** $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$

c) $\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx$ **d)** $\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx$

a) $\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3)}$$

$$2x-4 = A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{lll} x=1 & \rightarrow\ -2 = 4B & \rightarrow\ B = -1/2 \\ x=-3 & \rightarrow\ -10 = 16C & \rightarrow\ C = -5/8 \\ x=0 & \rightarrow\ -4 = -3A + 3B + C & \rightarrow\ A = 5/8 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)}\,dx = \int \frac{5/8}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{-5/8}{x+3}\,dx =$$

$$= \frac{5}{8}\,ln|x-1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)} - \frac{5}{8}\,ln|x+3| + k = \frac{5}{8}\,ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right) + \frac{1}{2x-2} + k$$

b) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5) + B(x-2)}{(x-2)(x+5)}$$

$$2x+3 = A(x+5) + B(x-2)$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lll} x=2 & \rightarrow\ 7 = 7A & \rightarrow\ A = 1 \\ x=-5 & \rightarrow\ -7 = -7B & \rightarrow\ B = 1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x+5}\,dx =$$

$$= ln|x-2| + ln|x+5| + k = ln|(x-2)(x+5)| + k$$

c) $\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1)}{(x-1)(x+3)^2}$$

$$1 = A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x = 1 & \to\ 1 = 16A & \to\ A = 1/16 \\ x = -3 & \to\ 1 = -4C & \to\ C = -1/4 \\ x = 0 & \to\ 1 = 9A - 3B - C & \to\ B = -1/16 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx = \int \frac{1/16}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/16}{x+3}\,dx + \int \frac{-1/4}{(x+3)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\,ln|x-1| - \frac{1}{16}\,ln|x+3| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+3)} + k =$$

$$= \frac{1}{16}\,ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + \frac{1}{4(x+3)} + k$$

d) $\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$3x - 2 = A(x+2) + B(x-2)$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lll} x = 2 & \to\ 4 = 4A & \to\ A = 1 \\ x = -2 & \to\ -8 = -4B & \to\ B = 2 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx =$$

$$= ln|x-2| + 2\,ln|x+2| + k = ln\left[|x-2|(x+2)^2\right] + k$$

PARA RESOLVER

17 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int x^4 e^{x^5}\, dx$ **b)** $\int x \, sen\, x^2\, dx$ **c)** $\int \sqrt{(x+3)^5}\, dx$ **d)** $\int \frac{-3x}{2-6x^2}\, dx$

a) $\int x^4 e^{x^5}\, dx = \frac{1}{5}\int 5x^4 e^{x^5}\, dx = \frac{1}{5} e^{x^5} + k$

b) $\int x \, sen\, x^2\, dx = \frac{1}{2}\int 2x \, sen\, x^2\, dx = \frac{-1}{2} \cos x^2 + k$

c) $\int \sqrt{(x+3)^5}\, dx = \int (x+3)^{5/2}\, dx = \frac{(x+3)^{7/2}}{7/2} = \frac{2}{7}\sqrt{(x+3)^7} + k$

d) $\int \frac{-3x}{2-6x^2}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{-12x}{2-6x^2}\, dx = \frac{1}{4} \ln|2-6x^2| + k$

18 **Resuelve estas integrales:**

a) $\int x \cdot 2^{-x}\, dx$ **b)** $\int x^3 \, sen\, x\, dx$ **c)** $\int e^x \cos x\, dx$ **d)** $\int x^5 e^{-x^3}\, dx$

a) $\int x \cdot 2^{-x}\, dx$

$$\begin{cases} u = x \ \rightarrow \ du = dx \\ dv = 2^{-x}\, dx \ \rightarrow \ v = \frac{-2^{-x}}{\ln 2} \end{cases}$$

$$\int x\, 2^{-x}\, dx = \frac{-x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} + \int \frac{2^{-x}}{\ln 2}\, dx = \frac{-x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2}\int 2^{-x}\, dx =$$

$$= \frac{-x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{(\ln 2)^2} + k$$

b) $\int x^3 \, sen\, x\, dx$

$$\begin{cases} u = x^3 \ \rightarrow \ du = 3x^2\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \ \rightarrow \ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x^3 \, sen\, x\, dx = -x^3 \cos x + 3\underbrace{\int x^2 \cos x\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x^2 \ \rightarrow \ du_1 = 2x\, dx \\ dv_1 = \cos x\, dx \ \rightarrow \ v_1 = sen\, x \end{cases}$$

$$I_1 = x^2 \, sen\, x - 2\underbrace{\int x \, sen\, x\, dx}_{I_2}$$

$$\begin{cases} u_2 = x \ \rightarrow \ du_2 = dx \\ dv_2 = sen\, x\, dx \ \rightarrow \ v_2 = -\cos x \end{cases}$$

$$I_2 = -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + sen\, x$$

Así: $I_1 = x^2 \, sen \, x + 2x \cos x - 2 \, sen \, x$

Por tanto:

$$\int x^3 \, sen \, x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \, sen \, x + 6x \cos x - 6 \, sen \, x + k$$

c) $\int e^x \cos x \, dx$

$$\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x \, dx \\ dv = \cos x \, dx \rightarrow v = sen \, x \end{cases}$$

$$I = e^x \, sen \, x - \underbrace{\int e^x \, sen \, x \, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x \, dx \\ dv = sen \, x \, dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$I_1 = -\cos x \, e^x + \int e^x \cos x \, dx$$

$$I = e^x \, sen \, x - (-\cos x \, e^x + I)$$

$$2I = e^x \, sen \, x + e^x \cos x$$

$$I = \frac{e^x \, sen \, x + e^x \cos x}{2} + k$$

d) $\int x^5 e^{-x^3} dx = \int x^3 \cdot x^2 e^{-x^3} dx$

$$\begin{cases} u = x^3 \rightarrow du = 3x^2 \, dx \\ dv = x^2 e^{-x^3} dx \rightarrow v = \frac{-1}{3} e^{-x^3} \end{cases}$$

$$\int x^5 e^{-x^3} dx = \frac{-x^3}{3} e^{-x^3} + \int x^2 e^{-x^3} dx = \frac{-x^3}{3} e^{-x^3} - \frac{1}{3} e^{-x^3} + k =$$

$$= \frac{(-x^3 - 1)}{3} e^{-x^3} + k$$

19 Calcula las integrales racionales siguientes:

a) $\int \frac{x + 2}{x^2 + 1} dx$

b) $\int \frac{1}{(x^2 - 1)^2} dx$

c) $\int \frac{2x^2 + 7x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$

d) $\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx$

a) $\int \frac{x + 2}{x^2 + 1} dx \overset{(1)}{=} \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + 2 \, arc \, tg \, x + k$

(1) Hacemos $\int \frac{(x + 2)dx}{x^2 + 1} = \int \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{2}{x^2 + 1} \right) dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2\,(x+1)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)^2\,(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2\,(x+1)^2} = \frac{A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2}{(x-1)^2\,(x+1)^2}$$

$$1 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2$$

Calculamos A, B, C y D, dando a x los valores 1, –1, 0 y 2:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \;\to\; 1 = 4B \;\to\; B = 1/4 \\ x = -1 \;\to\; 1 = 4D \;\to\; D = 1/4 \\ x = 0 \;\to\; 1 = -A + B + C + D \;\to\; 1/2 = -A + C \\ x = 2 \;\to\; 1 = 9A + 9B + 3C + D \;\to\; -3/2 = 9A + 3C \;\to\; -1/2 = 3A + C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = -1/4 \\ B = 1/4 \\ C = 1/4 \\ D = 1/4 \end{array}$$

$$\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx = \int \frac{-1/4}{(x-1)}\,dx + \int \frac{1/4}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1/4}{(x+1)}\,dx + \int \frac{1/4}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{-1}{4}\,ln|x-1| - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{4}\,ln|x+1| - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)} + k =$$

$$= \frac{-1}{4}\left[ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\right] + k =$$

$$= \frac{-1}{4}\left[ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{2x}{x^2-1}\right] + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples (para ello, encontramos las raíces del denominador):

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$2x^2 + 7x - 1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \;\to\; 8 = 4A \;\to\; A = 2 \\ x = -1 \;\to\; -6 = -2C \;\to\; C = 3 \\ x = 0 \;\to\; -1 = A - B - C \;\to\; B = 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x^2 + 7x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}\, dx = \int \frac{2}{x - 1}\, dx + \int \frac{3}{(x + 1)^2}\, dx = 2\, ln|x - 1| - \frac{3}{x + 1} + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx = \int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x(x - 1)(x + 2)}\, dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x(x - 1)(x + 2)} = \frac{A(x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 1)}{x(x - 1)(x + 2)}$$

$$2x^2 + 5x - 1 = A(x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x = 0 & \to -1 = -2A & \to & A = 1/2 \\ x = 1 & \to 6 = 3B & \to & B = 2 \\ x = -2 & \to -3 = 6C & \to & C = -1/2 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx = \int \frac{1/2}{x}\, dx + \int \frac{2}{x - 1}\, dx + \int \frac{-1/2}{x + 2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\, ln|x| + 2\, ln|x - 1| - \frac{1}{2}\, ln|x + 2| + k =$$

$$= ln\left(\frac{(x - 1)^2\sqrt{x}}{\sqrt{x + 2}}\right) + k$$

20 **Para resolver la integral $\int cos^3 x\, dx$, hacemos:**

$$\boldsymbol{cos^3 x = cos\, x\, cos^2 x = cos\, x(1 - sen^2 x) =}$$

$$\boldsymbol{= cos\, x - cos\, x\, sen^2 x}$$

Así, la descomponemos en dos integrales inmediatas. Calcúlala.

Resuelve, después, $\int sen^3 x\, dx$.

- $\displaystyle\int cos^3 x\, dx = \int cos\, x\, dx - \int cos\, x\, sen^2 x\, dx = sen\, x - \frac{sen^3 x}{3} + k$

- $\displaystyle\int sen^3 x\, dx = \int sen\, x\,(sen^2 x)\, dx = \int sen\, x(1 - cos^2 x)\, dx =$

$$= \int sen\, x\, dx - \int sen\, x\, cos^2 x\, dx = -cos\, x + \frac{cos^3 x}{3}$$

s21 **Calcula:**

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - x - 2}$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\, dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}\, dx$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \int \frac{dx}{(x + 1)(x - 2)}$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)}$$

$$1 = A(x - 2) + B(x + 1)$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{llll} x = -1 & \to & 1 = -3A & \to \quad A = -1/3 \\ x = 2 & \to & 1 = 3B & \to \quad B = 1/3 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2}\, dx = \int \frac{-1/3}{x + 1}\, dx + \int \frac{1/3}{x - 2}\, dx =$$

$$= \frac{-1}{3}\, ln|x + 1| + \frac{1}{3}\, ln|x - 2| + k =$$

$$= \frac{1}{3}\, ln\left|\frac{x - 2}{x + 1}\right| + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx = \int \left(x - 1 + \frac{3x^2 - 6}{x(x - 1)(x + 2)}\right) dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3x^2 - 6}{x(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

$$\frac{3x^2 - 6}{x(x - 1)(x + 2)} = \frac{A(x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 1)}{x(x - 1)(x + 2)}$$

$$3x^2 - 6 = A(x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x = 0 & \to & -6 = -2A & \to \quad A = 3 \\ x = 1 & \to & -3 = 3B & \to \quad B = -1 \\ x = -2 & \to & 6 = 6C & \to \quad C = 1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx = \int \left(x - 1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + 3\, ln|x| - ln|x-1| + ln|x+2| + k =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + ln\left|\frac{x^3(x+2)}{x-1}\right| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\, dx = \int \frac{5x^2}{(x-1)^3}\, dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{5x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3}$$

$5x^2 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{lll} x = 1 & \to & 5 = C \\ x = 2 & \to & 20 = A + B + C \\ x = 0 & \to & 0 = A - B + C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 5 \\ B = 10 \\ C = 5 \end{array}$$

Por tanto:

$$\int \frac{5x^2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\, dx = \int \left(\frac{5}{x-1} + \frac{10}{(x-1)^2} + \frac{5}{(x-1)^3} \right) dx =$$

$$= 5\, ln|x-1| - \frac{10}{x-1} - \frac{5}{2(x-1)^2} + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}\, dx = \int \frac{2x-3}{(x-2)(x-3)(x+3)}\, dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-3}{(x-2)(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{2x-3}{(x-2)(x-3)(x+3)} = \frac{A(x-3)(x+3) + B(x-2)(x+3) + C(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x+3)}$$

$2x - 3 = A(x-3)(x+3) + B(x-2)(x+3) + C(x-2)(x-3)$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = 2 & \to & 1 = -5A & \to & A = -1/5 \\ x = 3 & \to & 3 = 6B & \to & B = 1/2 \\ x = -3 & \to & -9 = 30C & \to & C = -3/10 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x-3}{x^3-2x^2-9x+18}\,dx = \int \left(\frac{-1/5}{x-2} + \frac{1/2}{x-3} + \frac{-3/10}{x+3} \right) dx =$$

$$= \frac{-1}{5}\,ln|x-2| + \frac{1}{2}\,ln|x-3| - \frac{3}{10}\,ln|x+3| + k$$

22 **Resuelve las integrales siguientes:**

a) $\int \frac{ln\,x}{x}\,dx$

b) $\int \frac{1-sen\,x}{x+cos\,x}\,dx$

c) $\int \frac{1}{x\,ln\,x}\,dx$

d) $\int \frac{1+e^x}{e^x+x}\,dx$

e) $\int \frac{sen\,(1/x)}{x^2}\,dx$

f) $\int \frac{2x-3}{x+2}\,dx$

g) $\int \frac{arc\,tg\,x}{1+x^2}\,dx$

h) $\int \frac{sen\,x}{cos^4\,x}\,dx$

a) $\int \frac{ln\,x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,ln\,x\,dx = \frac{ln^2|x|}{2} + k$

b) $\int \frac{1-sen\,x}{x+cos\,x}\,dx = ln|x+cos\,x| + k$

c) $\int \frac{1}{x\,ln\,x}\,dx = \int \frac{1/x}{ln\,x}\,dx = ln\big|ln|x|\big| + k$

d) $\int \frac{1+e^x}{e^x+x}\,dx = ln|e^x+x| + k$

e) $\int \frac{sen\,(1/x)}{x^2}\,dx = -\int \frac{-1}{x^2}\,sen\left(\frac{1}{x}\right) dx = cos\left(\frac{1}{x}\right) + k$

f) $\int \frac{2x-3}{x+2}\,dx = \int \left(2 - \frac{7}{x+2}\right) dx = 2x - 7\,ln|x+2| + k$

g) $\int \frac{arc\,tg\,x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,arc\,tg\,x\,dx = \frac{arc\,tg^2\,x}{2} + k$

h) $\int \frac{sen\,x}{cos^4\,x}\,dx = -\int (-sen\,x)(cos\,x)^{-4}\,dx = \frac{-(cos\,x)^{-3}}{-3} + k = \frac{1}{3\,cos^3\,x} + k$

Página 358

23 **Calcula las integrales indefinidas:**

a) $\displaystyle\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int ln\,(x-3)\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int ln\,(x^2+1)\,dx$

e) $\displaystyle\int (ln\,x)^2\,dx$ **f)** $\displaystyle\int e^x \cos e^x\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{1+x}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = -2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,(-sen\,\sqrt{x})\,dx = -2\cos(\sqrt{x}) + k$

b) $\displaystyle\int ln\,(x-3)\,dx$

$$\begin{cases} u = ln\,(x-3) \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{x-3}\,dx \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{cases}$$

$$\int ln\,(x-3)\,dx = x\,ln|x-3| - \int \frac{x}{x-3}\,dx = x\,ln|x-3| - \int 1 + \frac{3}{x-3}\,dx =$$

$$= x\,ln|x-3| - x - 3\,ln|x-3| + k = (x-3)\,ln|x-3| - x + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\begin{cases} u = ln\,\sqrt{x} \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x}\,dx \\ v = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;\rightarrow\; dv = 2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\int \frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\,ln\,\sqrt{x} - \int \frac{2\sqrt{x}}{2x}\,dx = 2\sqrt{x}\,ln\,\sqrt{x} - \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\,ln\,\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + k = 2\sqrt{x}\,(ln\,\sqrt{x} - 1) + k$$

d) $\displaystyle\int ln\,(x^2+1)\,dx$

$$\begin{cases} u = ln\,(x^2+1) \;\rightarrow\; du = \dfrac{2x}{x^2+1}\,dx \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{cases}$$

$$\int ln\,(x^2+1)\,dx = x\,ln\,(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx =$$

$$= x\,ln\,(x^2+1) - \int \left(2 - \frac{2}{x^2+1}\right) dx = x\,ln\,(x^2+1) - 2x + 2\,arc\,tg\,x + k$$

e) $\int (ln\,x)^2\,dx$

$$\begin{cases} u = (ln\,x)^2 \;\rightarrow\; du = 2\,(ln\,x)\cdot \frac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{cases}$$

$$\int (ln\,x)^2\,dx = x\,(ln\,x)^2 - 2\int ln\,x\,dx = x\,ln^2|x| - 2\,x\,ln|x| + 2x + k$$

f) $\int e^x\,cos\,e^x dx = sen\,e^x + k$

g) $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{-1}{(x+1)(x-1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{l} x=-1 \;\rightarrow\; -1=-2A \;\rightarrow\; A=1/2 \\ x=1 \;\rightarrow\; -1=2B \;\rightarrow\; B=-1/2 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \left(\frac{1/2}{x+1} + \frac{-1/2}{x-1}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,ln|x+1| - \frac{1}{2}\,ln|x-1| + k = ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + k$$

h) $\int \frac{(1-x)^2}{1+x}\,dx = \int \frac{x^2-2x+1}{x+1}\,dx = \int \left(x - 3 + \frac{4}{x+1}\right) dx =$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + 4\,ln|x+1| + k$$

s24 **Resuelve:**

a) $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$

☛ ***En el numerador, suma y resta*** e^x.

b) $\int \frac{x + 3}{\sqrt{9 - x^2}} dx$

☛ ***Descomponla en suma de otras dos.***

a) $\int \frac{1}{1 + e^x} dx \overset{(1)}{=} \int \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x} dx = \int \left(\frac{1 + e^x}{1 + e^x} - \frac{e^x}{1 + e^x} \right) dx =$

$$= \int \left(1 - \frac{e^x}{1 + e^x} \right) = x - \ln (1 + e^x) + k$$

(1) Sumamos y restamos e^x en el numerador.

b) $\int \frac{x + 3}{\sqrt{9 - x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} dx + \int \frac{3dx}{\sqrt{9 - x^2}} =$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{9 - x^2}} dx + \int \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} dx =$$

$$= -\sqrt{9 - x^2} + 3 \int \frac{1/3}{\sqrt{1 - (x/3)^2}} dx =$$

$$= -\sqrt{9 - x^2} + 3 \, arc \, sen \left(\frac{x}{3} \right) + k$$

25 **Resuelve por sustitución:**

a) $\int x \sqrt{x + 1} \, dx$ **b)** $\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$ **c)** $\int \frac{x}{\sqrt{x + 1}} dx$

d) $\int \frac{1}{x \sqrt{x + 1}} dx$ **e)** $\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$ **f)** $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x} dx$

☛ ***a), c), d) Haz*** $x + 1 = t^2$. ***b) Haz*** $x = t^4$. ***e), f) Haz*** $x = t^2$.

a) $\int x \sqrt{x + 1} \, dx$

Cambio: $x + 2 = t^2 \rightarrow dx = 2t \, dt$

$$\int x \sqrt{x + 1} \, dx = \int (t^2 - 1) t \cdot 2t \, dt = \int (2t^4 - 2t^2) \, dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + k =$$

$$= \frac{2\sqrt{(x + 1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(x + 1)^3}}{3} + k$$

b) $\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$

Cambio: $x = t^4 \;\rightarrow\; dx = 4t^3\, dt$

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3\, dt}{t^4 - t} = \int \frac{4t^2\, dt}{t^3 - 1} = \frac{4}{3}\int \frac{3t^2\, dt}{t^3 - 1} = \frac{4}{3}\, ln|t^3 - 1| + k =$$

$$= \frac{4}{3}\, ln|\sqrt[4]{x^3} - 1| + k$$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x + 1}}\, dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\, dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int \frac{(t^2 - 1)}{t} \cdot 2t\, dt = \int (2t^2 - 2)\, dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + k =$$

$$= \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} - 2\sqrt{x+1} + k$$

d) $\int \frac{1}{x\sqrt{x + 1}}\, dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\, dt$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\, dx = \int \frac{2t\, dt}{(t^2 - 1)t} = \int \frac{2\, dt}{(t+1)(t-1)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + B(t+1)}{(t+1)(t-1)}$$

$$2 = A(t - 1) + B(t + 1)$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lll} t = -1 \;\rightarrow\; & 2 = -2A \;\rightarrow\; & A = -1 \\ t = 1 \;\rightarrow\; & 2 = 2B \;\rightarrow\; & B = 1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2\, dt}{(t+1)(t-1)} = \int \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t-1}\right) dt = -ln|t+1| + ln|t-1| + k =$$

$$= ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + k$$

Así:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\, dx = ln\left|\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1}\right| + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x + \sqrt{x}}\, dx$

Cambio: $x = t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\, dt$

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x}}\, dx = \int \frac{2t\, dt}{t^2 + t} = \int \frac{2\, dt}{t + 1} = 2\, ln\,|t + 1| + k =$$

$$= 2\, ln\,(\sqrt{x} + 1) + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x}\, dx$

Cambio: $x = t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\, dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x}\, dx = \int \frac{t \cdot 2t\, dt}{1 + t^2} = \int \frac{2t^2\, dt}{1 + t^2} = \int \left(2 - \frac{2}{1 + t^2}\right) dt =$$

$$= 2t - 2\, arc\, tg\, t + k = 2\sqrt{x} - 2\, arc\, tg\, \sqrt{x} + k$$

26 **Resuelve, utilizando un cambio de variable, estas integrales:**

a) $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^{x}}$

c) $\displaystyle\int \frac{e^{3x} - e^{x}}{e^{2x} + 1}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\, dx$

☛ ***a) Haz $x = sen\, t$.***

a) Hacemos $x = sen\, t \;\rightarrow\; dx = cos\, t\, dt$

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int \sqrt{1 - sen^2\, t}\; cos\, t\, dt = \int cos^2\, t\, dt \overset{(1)}{=} \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos\, 2t}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\int 2\, cos\, 2t\, dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\, sen\, 2t + k$$

(1) $cos^2\, t = \dfrac{1 + cos\, 2t}{2}$

Deshacemos el cambio:

$sen\, t = x \;\rightarrow\; cos\, t = \sqrt{1 - x^2}\,;\;\; t = arc\, sen\, x$

$sen\, 2t = 2\, sen\, t\, cos\, t = 2x\sqrt{1 - x^2}$

Por tanto:

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(arc\, sen\, x + x\sqrt{1 - x^2}\,\right) + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x}$

Hacemos el cambio: $e^x = t \;\rightarrow\; x = ln\ t \;\rightarrow\; dx = \frac{1}{t}\ dt$

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x} = \int \frac{1/t}{t^2 - 3t}\ dt = \int \frac{1}{t^3 - 3t^2}\ dt = \int \frac{1}{t^2(t-3)}\ dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-3} = \frac{At(t-3) + B(t-3) + Ct^2}{t^2(t-3)}$$

$$1 = At(t-3) + B(t-3) + Ct^2$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} t = 0 & \rightarrow & 1 = -3B & \rightarrow\ B = -1/3 \\ t = 3 & \rightarrow & 1 = 9C & \rightarrow\ C = 1/9 \\ t = 1 & \rightarrow & 1 = -2A - 2B + C & \rightarrow\ A = -1/9 \end{array}\right\}$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{1}{t^2(t-3)}\ dt = \int \left(\frac{-1/9}{t} + \frac{-1/3}{t^2} + \frac{1/9}{t-3} \right) dt =$$

$$= \frac{-1}{9}\ ln|t| + \frac{1}{3t} + \frac{1}{9}\ ln|t-3| + k$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x} = \frac{-1}{9}\ ln\ e^x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\ ln|e^x - 3| + k =$$

$$= -\frac{1}{9}x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\ ln|e^x - 3| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + 1}\ dx$

Hacemos el cambio: $e^x = t \;\rightarrow\; x = ln\ t \;\rightarrow\; dx = \frac{1}{t}\ dt$

$$\int \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + 1}\ dx = \int \frac{t^3 - t}{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{t}\ dt = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\ dt = \int \left(1 - \frac{2}{t^2 + 1}\right) dt =$$

$$= t - 2\ arc\ tg\ t + k = e^x - 2\ arc\ tg\ (e^x) + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\ dx$

Hacemos el cambio: $x = t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\ dt$

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\ dx = \int \frac{2t\ dt}{1 + t} = \int \left(2 - \frac{2}{1 + t}\right) dt = 2t - 2\ ln|1 + t| + k =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ ln\ (1 + \sqrt{x}) + k$$

s27 **Encuentra la primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3x}$ que se anula para $x = 0$.**

$F(x) = \int \dfrac{1}{1 + 3x}\, dx = \dfrac{1}{3} \int \dfrac{3}{1 + 3x}\, dx = \dfrac{1}{3}\, ln|1 + 3x| + k$

$F(0) = k = 0$

Por tanto: $F(x) = \dfrac{-1}{3}\, ln|1 + 3x|$

28 **Halla la función F para la que $F'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y $F(1) = 2$.**

$F(x) = \int \dfrac{1}{x^2}\, dx = \dfrac{-1}{x} + k$

$F(1) = -1 + k = 2 \;\Rightarrow\; k = 3$

Por tanto: $F(x) = \dfrac{-1}{x} + 3$

29 **De todas las primitivas de la función $y = 4x - 6$, ¿cuál de ellas toma el valor 4 para $x = 1$?**

$F(x) = \int (4x - 6)\, dx = 2x^2 - 6x + k$

$F(1) = 2 - 6 + k = 4 \;\Rightarrow\; k = 8$

Por tanto: $F(x) = 2x^2 - 6x + 8$

30 **Halla $f(x)$ sabiendo que $f''(x) = 6x$, $f'(0) = 1$ y $f(2) = 5$.**

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \int 6x\, dx = 3x^2 + c \\ f'(0) = c = 1 \end{array}\right\} \; f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \int (3x^2 + 1)\, dx = x^3 + x + k \\ f(2) = 10 + k = 5 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; k = -5$$

Por tanto: $f(x) = x^3 + x - 5$

31 **Resuelve las siguientes integrales por sustitución:**

a) $\int \dfrac{e^x}{1 - \sqrt{e^x}}\, dx$ **b)** $\int \sqrt{e^x - 1}\, dx$

☛ ***a) Haz $\sqrt{e^x} = t$. b) Haz $\sqrt{e^x - 1} = t$.***

a) $\int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}}\,dx$

Cambio: $\sqrt{e^x} = t \to e^{x/2} = t \to \frac{x}{2} = \ln t \to dx = \frac{2}{t}\,dt$

$$\int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}} = \int \frac{t^2 \cdot (2/t)\,dt}{1-t} = \int \frac{2t\,dt}{1-t} = \int \left(-2 + \frac{2}{1-t}\right) dt =$$

$$= -2t - 2\ln|1-t| + k = -2\sqrt{e^x} - 2\ln|1-\sqrt{e^x}| + k$$

b) $\int \sqrt{e^x - 1}\,dx$

Cambio: $\sqrt{e^x - 1} = t \to e^x = t^2 + 1 \to x = \ln(t^2+1) \to dx = \frac{2t}{t^2+1}\,dt$

$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx = \int t \cdot \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt = \int \left(2 - \frac{2}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= 2t - 2\,\text{arc tg}\,t + k = 2\sqrt{e^x-1} - 2\,\text{arc tg}\,\sqrt{e^x-1} + k$$

32 **Calcula** $\int \frac{\text{sen}^2 x}{1+\cos x}\,dx$**.**

☛ ***Multiplica el numerador y el denominador por 1 – cos x.***

$$\int \frac{\text{sen}^2 x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{\text{sen}^2 x\,(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}\,dx = \int \frac{\text{sen}^2 x\,(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{\text{sen}^2 x\,(1-\cos x)}{\text{sen}^2 x}\,dx = \int (1-\cos x)\,dx = x - \text{sen}\,x + k$$

33 **En el ejercicio resuelto de la página 344, se ha calculado la integral** $\int \cos^2 x\,dx$ **de dos formas:**

— Aplicando fórmulas trigonométricas.

— Integrando por partes.

Utiliza estos dos métodos para resolver:

$\int \text{sen}^2 x\,dx$

- $\int \text{sen}^2 x\,dx \overset{(1)}{=} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2x + k$

  (1) Aplicando la fórmula: $\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

- Por partes:

$$\begin{cases} u = \text{sen}\,x \to du = \cos x\,dx \\ dv = \text{sen}\,x\,dx \to v = -\cos x \end{cases}$$

$$I = -sen\,x \cos x + \int \cos^2 x\,dx = -sen\,x \cos x + \int (1 - sen^2 x)\,dx$$

$$2I = -sen\,x \cos x + x \;\rightarrow\; I = \frac{-sen\,x \cos x}{2} + \frac{1}{2}x$$

$$I = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} sen\,2x + k = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} sen\,2x + k$$

s34 **Encuentra una primitiva de la función $f(x) = x^2\,sen\,x$ cuyo valor para $x = \pi$ sea 4.**

$$F(x) = \int x^2\,sen\,x\,dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = x^2 \;\rightarrow\; du = 2x\,dx \\ dv = sen\,x\,dx \;\rightarrow\; v = -\cos x \end{cases}$$

$$F(x) = -x^2 \cos x + 2\underbrace{\int x \cos x\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \;\rightarrow\; du_1 = dx \\ dv_1 = \cos x\,dx \;\rightarrow\; v_1 = sen\,x \end{cases}$$

$$I_1 = x\,sen\,x - \int sen\,x\,dx = x\,sen\,x + \cos x$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = -x^2 \cos x + 2\,x\,sen\,x + 2\cos x + k \\ F(\pi) = \pi^2 - 2 + k = 4 \;\Rightarrow\; k = 6 - \pi^2 \end{array}\right\}$$

$$F(x) = -x^2 \cos x + 2\,x\,sen\,x + 2\cos x + 6 - \pi^2$$

s35 **Determina la función $f(x)$ sabiendo que:**

$$f''(x) = x\,ln\,x,\; f'(1) = 0 \;\text{ y }\; f(e) = \frac{e}{4}$$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx \;\rightarrow\; f'(x) = \int x\,ln\,x\,dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = ln\,x \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx \;\rightarrow\; v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2}\,ln\,x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\,ln\,x - \frac{x^2}{4} + k = \frac{x^2}{2}\left(ln\,x - \frac{1}{2}\right) + k$$

$f'(1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + k = -\frac{1}{4} + k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

$f'(x) = \frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx \to f(x) = \int \left[\frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\right] dx = \underbrace{\int \frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) dx}_{I} + \frac{1}{4}x$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = \left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{x^2}{2}\,dx \to v = \frac{x^3}{6} \end{cases}$$

$$I = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \int \frac{x^2}{6}\,dx = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + k$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + \frac{1}{4}x + k \\ f(e) = \frac{e^3}{12} - \frac{e^3}{18} + \frac{e}{4} + k = \frac{e^3}{36} + \frac{e}{4} + k = \frac{e}{4} \Rightarrow k = -\frac{e^3}{36} \end{array}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + \frac{1}{4}x - \frac{e^3}{36}$$

s36 Calcula la expresión de una función $f(x)$ tal que $f'(x) = x\,e^{-x^2}$ y que $f(0) = \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \int x\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2x\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2} + k$$

$f(0) = -\frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 1$

Por tanto: $f(x) = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2} + 1$

s37 De una función $y = f(x)$, $x > -1$ sabemos que tiene por derivada $y' = \frac{a}{1+x}$ donde a es una constante. Determina la función si, además, sabemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$.

$y = \int \frac{a}{1+x}\,dx \to f(x) = a\,ln(1+x) + k \quad (x > -1)$

$f(0) = 1 \rightarrow a\ ln(1 + 0) + k = 1 \rightarrow k = 1$

$f(1) = -1 \rightarrow a\ ln\ 2 + k = -1 \rightarrow a\ ln\ 2 = -1 - 1 \rightarrow a = \dfrac{-2}{ln\ 2}$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{-2}{ln\ 2}\ ln(1 + x) + 1,\ x > -1.$

Página 359

s38 **Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ln\,(1 + x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.**

$\int ln\ (1 + x^2)\ dx$

Integramos por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = ln(1 + x^2) \rightarrow du = \dfrac{2x}{1 + x^2}\,dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$\int ln\ (1 + x^2)\ dx = x\ ln\ (1 + x^2) - \int \frac{2x^2}{1 + x^2}\,dx =$$

$$= x\ ln\ (1 + x^2) - 2\int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx =$$

$$= x\ ln\ (1 + x^2) - 2(x - arc\ tg\ x) + k$$

$F(x) = x\ ln\ (1 + x^2) - 2x + 2arc\ tg\ x + k$

Debe pasar por (0, 0) $\rightarrow F(0) = 0$

$F(0) = 0 - 2 \cdot 0 + 0 + k = 0 \rightarrow k = 0$

Así, $F(x) = x\ ln\ (1 + x^2) - 2x + 2arc\ tg\ x.$

s39 **Calcula a para que una primitiva de la función $\int (ax^2 + x\cos x + 1)\,dx$ pase por $(\pi, -1)$.**

$$I = \int (ax^2 + x\cos x + 1)\,dx = \int (ax^2 + 1)\,dx + \int x\cos x\,dx =$$

$$= \frac{ax^3}{3} + x + \underbrace{\int x\cos x\,dx}_{I_1}$$

Calculamos I_1 por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x\,dx \rightarrow v = sen\ x \end{array}\right\}$$

$$I_1 = x\ sen\ x - \int sen\ x\,dx = x\ sen\ x + \cos x + k$$

$F(x) = \frac{ax^3}{3} + x + x \text{ sen } x + \cos x$

Como pasa por $(\pi, -1)$:

$F(\pi) = -1 \rightarrow \frac{a\pi^3}{3} + \pi + \pi \cdot \text{sen } \pi + \cos \pi = -1$

$\frac{a\pi^3}{3} + \pi - 1 = -1 \rightarrow \frac{a\pi^3}{3} = -\pi \rightarrow a = \frac{-3\pi}{\pi^3} = \frac{-3}{\pi^2}$

Así, $F(x) = \frac{-3}{\pi^2} \frac{x^3}{3} + x + x \text{ sen } x + \cos x = -\frac{x^3}{\pi^2} + x + x \text{ sen } x + \cos x$

s40 Halla $\int e^{ax}(x^2 + bx + c)\, dx$ en función de los parámetros a, b y c.

$I = \int e^{ax}(x^2 + bx + c)\, dx$

Integramos por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 + bx + c \rightarrow du = (2x + b)dx \\ dv = e^{ax}dx \rightarrow v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{array}\right\}$$

Así:

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a}\underbrace{\int e^{ax}(2x + b)\, dx}_{I_1}$$

Volvemos a integrar por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = 2x + b \rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{ax}dx \rightarrow v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a}I_1 =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}e^{ax}(2x + b) - \frac{1}{a}\int e^{ax}\, 2dx\right] =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a^2}e^{ax}(2x + b) + \frac{2}{a^3}e^{ax} + k$$

s41 Encuentra la función derivable $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple $f(1) = -1$ y

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

- Si $x \neq 0$:

$$f(x) = \int f'(x)\, dx \quad \begin{array}{ll} \int (x^2 - 2x)\, dx & \text{si } -1 \le x < 0 \\ \int (e^x - 1)\, dx & \text{si } 0 \le x < 1 \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + k & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - x + c & \text{si } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

- Hallamos k y c teniendo en cuenta que $f(1) = -1$ y que $f(x)$ ha de ser continua en $x = 0$.

$$f(1) = -1 \;\Rightarrow\; e - 1 + c = -1 \;\Rightarrow\; c = -e$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 - e \end{array}\right\} \; k = 1 - e$$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - x - e & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

s42 De una función derivable se sabe que pasa por el punto $A(-1, -4)$ y que su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \le 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

a) Si $x \ne 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\ \ln x + c & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos k y c teniendo en cuenta que $f(-1) = -4$ y que $f(x)$ ha de ser continua en $x = 1$:

$$f(-1) = -\frac{5}{2} + k = -4 \;\Rightarrow\; k = -\frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = c \end{array}\right\} \; c = 0$$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

b) $f(2) = \ln 2$; $f'(2) = \dfrac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente será: $y = \ln 2 + \dfrac{1}{2}(x - 2)$

s43 **Calcula:**

a) $\int |1 - x|\ dx$ **b)** $\int (3 + |x|)\ dx$

c) $\int |2x - 1|\ dx$ **d)** $\int \left|\frac{x}{2} - 2\right|\ dx$

a) $\int |1 - x|\ dx$

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 1 \\ -1 + x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \int |1 - x|\ dx = \begin{cases} x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\ -x + \dfrac{x^2}{2} + c & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

En $x = 1$, la función ha de ser continua:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{2} + k \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\dfrac{1}{2} + c \end{array}\right\} \dfrac{1}{2} + k = -\dfrac{1}{2} + c \Rightarrow c = 1 + k$$

Por tanto:

$$\int |1 - x|\ dx = \begin{cases} x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\ -x + \dfrac{x^2}{2} + 1 + k & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

b) $\int (3 + |x|)\ dx$

$$3 + |x| = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ 3 + x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \int (3 + |x|)\ dx = \begin{cases} 3x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 0 \\ 3x + \dfrac{x^2}{2} + c & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

En $x = 0$, $f(x)$ ha de ser continua:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = c \end{array}\right\} c = k$$

Por tanto:

$$\int (3 + |x|)\ dx = \begin{cases} 3x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 0 \\ 3x + \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

c) $\int |2x - 1| \, dx$

$$|2x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

$$f(x) = \int |2x - 1| \, dx = \begin{cases} -x^2 + x + k & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ x^2 - x + c & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$f(x)$ ha de ser continua en $x = \frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to (1/2)^-} f(x) = \frac{1}{4} + k \\ \lim\limits_{x \to (1/2)^+} f(x) = -\frac{1}{4} + c \end{array}\right\} \frac{1}{4} + k = -\frac{1}{4} + c \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{2} + k$$

Por tanto:

$$\int |2x - 1| \, dx = \begin{cases} -x^2 + x + k & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ x^2 - x + \frac{1}{2} + k & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

d) $\int \left| \frac{x}{2} - 2 \right| dx$

$$\left| \frac{x}{2} - 2 \right| = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 2 & \text{si } x < 4 \\ \frac{x}{2} - 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \int \left| \frac{x}{2} - 2 \right| dx = \begin{cases} -\frac{x^2}{4} + 2x + k & \text{si } x < 4 \\ \frac{x^2}{4} - 2x + c & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$f(x)$ ha de ser continua en $x = 4$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 4 + k \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -4 + c \end{array}\right\} 4 + k = -4 + c \;\Rightarrow\; c = 8 + k$$

Por tanto:

$$\int \left| \frac{x}{2} - 2 \right| dx = \begin{cases} -\frac{x^2}{4} + 2x + k & \text{si } x < 4 \\ \frac{x^2}{4} - 2x + 8 + k & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

44 **Calcula $\int \frac{1}{sen^2 x \cos^2 x} dx$.**

☛ ***Utiliza la igualdad $sen^2 x + \cos^2 x = 1$.***

$$\int \frac{1}{sen^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{sen^2 x \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{sen^2 x}{sen^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{sen^2 x \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{sen^2 x} dx = tg\, x - cotg\, x + k$$

45 **Calcula $\int \cos^4 x \, dx$ utilizando la expresión:**

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

$$\cos^4 x = \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos^2 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{2} \overset{(1)}{=} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2}\right) + \frac{\cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} = \frac{3}{8} + \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2}$$

(1) $\cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2}$

Por tanto:

$$\int \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2}\right) dx = \frac{3}{8} x + \frac{sen\, 4x}{32} + \frac{sen\, 2x}{4} + k$$

46 **Resuelve:**

a) $\int \sqrt{4 - x^2} \, dx$

b) $\int \sqrt{9 - 4x^2} \, dx$

☛ ***a) Haz $x = 2\, sen\, t$. b) Haz $x = 3/2\, sen\, t$.***

a) $\int \sqrt{4 - x^2} \, dx$

Hacemos $x = 2sen\, t \rightarrow dx = 2\cos t \, dt$

$$\int \sqrt{4 - x^2} \, dx = \int \sqrt{4 - 4sen^2 t} \; 2\cos t \, dt = \int \sqrt{4(1 - sen^2 t)} \; 2\cos t \, dt =$$

$$= \int 4\cos^2 t \, dt = 4\int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = 4\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} sen\, 2t\right) + k =$$

$$= 2t + sen\, 2t + k$$

Deshacemos el cambio con $t = arc\ sen\ \dfrac{x}{2}$:

$$sen\ 2t = 2sen\ t\ cos\ t = 2sen\ t\ \sqrt{1 - sen^2\ t} = 2 \cdot \frac{x}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

$$I = 2arc\ sen\ \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + k$$

b) $\int \sqrt{9 - 4x^2}\ dx$

Hacemos $x = \dfrac{3}{2}\ sen\ t \rightarrow dx = \dfrac{3}{2}\ cos\ t\ dt$

$$\int \sqrt{9 - 4x^2}\ dx = \int \sqrt{9 - 4 \cdot \frac{9}{4} sen^2\ t} \cdot \frac{3}{2}\ cos\ t\ dt = \frac{3}{2}\int \sqrt{9(1 - sen^2\ t)}\ cos\ t\ dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int 3cos^2\ t\ dt = \frac{9}{2}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos\ 2t}{2}\right) dt = \frac{9}{2}\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}sen\ 2t\right) =$$

$$= \frac{9}{4}t + \frac{9}{8}sen\ 2t + k$$

Deshacemos el cambio:

$$\frac{2x}{3} = sen\ t \rightarrow t = arc\ sen\ \frac{2x}{3}$$

$$sen\ 2t = 2sen\ t\ cos\ t = 2sen\ t\ \sqrt{1 - sen^2\ t} = 2 \cdot \frac{2x}{3}\sqrt{1 - \frac{4x^2}{9}} = \frac{4x}{9}\sqrt{9 - 4x^2}$$

$$I = \frac{9}{4}\left(arc\ sen\ \frac{2x}{3}\right) + \frac{9}{8}\left(\frac{4x}{9}\sqrt{9 - 4x^2}\right) + k = \frac{9}{4}\ arc\ sen\ \frac{2x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{9 - 4x^2} + k$$

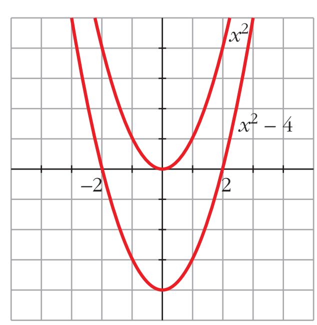
47 Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 2x$ tal que $F(x) \le 0$ en el intervalo [–2, 2].

$F(x) = \int 2x\ dx = x^2 + k$

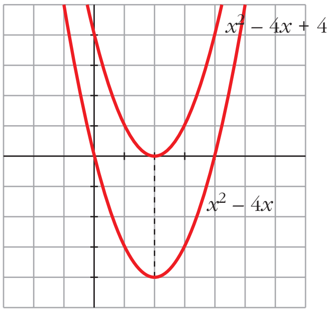
$x^2 + k \le 0$ en [–2, 2]

Debe ser $k \le -4$; por ejemplo, la función $F(x) = x^2 - 4$ es menor o igual que 0 en [–2, 2].

Representamos x^2 y $x^2 - 4$:



48 **Busca una primitva $F(x)$ de la función $f(x) = 2x - 4$ que verifique $F(x) \geq 0$ en el intervalo [0, 4].**



$F(x) = \int (2x - 4)\, dx = x^2 - 4x + k$

Debe ser $F(x) \geq 0$ en [0, 4].

Representamos $y = x^2 - 4x$:

Para que $F(x) \geq 0$ en [0, 4] debe ser $k \geq 4$.

Por ejemplo, $F(x) = x^2 - 4x + 4$.

49 **Halla $f(x)$ sabiendo que:**

$$f''(x) = \cos\frac{x}{2},\quad f'(2\pi) = 0 \;\text{ y }\; f(0) = 1$$

$f'(x) = \int f''(x)\, dx = \int \cos\frac{x}{2}\, dx = 2\int \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\, dx = 2\,sen\,\frac{x}{2} + k$

$f'(x) = 2\,sen\,\frac{x}{2} + k$; como $f'(2\pi) = 0 \to 2\,sen\,\frac{2\pi}{2} + k = 0 \to k = 0$

$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int 2sen\,\frac{x}{2}\, dx = 2 \cdot 2\int \frac{1}{2}\,sen\,\frac{x}{2}\, dx = 4\left(-\cos\frac{x}{2}\right) + k'$

$f(x) = -4\cos\frac{x}{2} + k'$; como $f(0) = 1 \to f(0) = -4\cos 0 + k' = 1 \to$

$\to -4 + k' = 1 \to k' = 5$

Por tanto, la función que buscamos es $f(x) = -4\cos\frac{x}{2} + 5$

50 **a) Halla la familia de curvas en las que la pendiente de las rectas tangentes a dichas curvas en cualquiera de sus puntos viene dada por la función:**

$$f(x) = \frac{x - 2}{2x + 4}$$

b) Determina, de esa familia, la curva que pasa por el punto $A\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

a) La pendiente de la recta tangente a la curva en uno de sus puntos viene dada por la derivada de la curva en ese punto.

Por tanto, $m = F'(x) = \frac{x - 2}{2x + 4}$.

Buscamos $F(x) = \int \frac{x - 2}{2x + 4}\, dx$.

$F(x) = \int \frac{x - 2}{2x + 4}\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2x + 4}\right) dx = \frac{1}{2}x - 2\int \frac{2}{2x + 4}\, dx =$

$= \frac{x}{2} - 2\,ln|2x + 4| + k$

b) Debe ser:

$$F\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4} \;\rightarrow\; \frac{-5/2}{2} - 2ln\left|2\left(-\frac{5}{2}\right) + 4\right| + k = \frac{3}{4} \;\rightarrow\; \frac{-5}{4} - 2ln\ 1 + k = \frac{3}{4} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; k = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2 \;\rightarrow\; F(x) = \frac{x}{2} - 2ln|2x + 4| + 2$$

51 **Calcula la función $f(x)$ sabiendo que $f''(x) = x$, que la gráfica de f pasa por el punto $P(1, 1)$ y que la tangente en P es paralela a la recta de ecuación $3x + 3y - 1 = 0$.**

$$f'(x) = \int f''(x)\, dx \;\rightarrow\; f'(x) = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + k$$

$$f(x) = \int f'(x)\, dx \;\rightarrow\; \int \left(\frac{x^2}{2} + k\right) dx = \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + kx + k'$$

f pasa por $P(1, 1) \rightarrow f(1) = 1 \rightarrow \frac{1}{6} + k + k' = 1 \quad (1)$

La pendiente de la recta tangente en P es $m = -1$; por ello:

$f'(1) = -1 \rightarrow \frac{1}{2} + k = -1 \quad (2)$

De las igualdades (1) y (2) obtenemos los valores de k y k':

$$k = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}; \quad k' = 1 - \frac{1}{6} - k = 1 - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{7}{3}$$

Por tanto, la función que buscamos es: $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{3}$

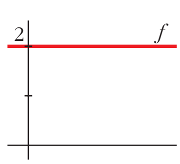
CUESTIONES TEÓRICAS

s52 **Prueba que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y C un número real cualquiera, la función $F(x) + C$ es también una primitiva de $f(x)$.**

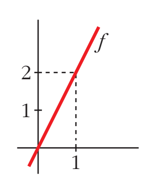
$F(x)$ primitiva de $f(x) \;\Leftrightarrow\; F'(x) = f(x)$

$$\big(F(x) + C\big)' = F'(x) = f(x) \;\Rightarrow\; F(x) + C \text{ es primitiva de } f(x).$$

53 **a) Representa tres primitivas de la función f cuya gráfica es la siguiente:**



b) Representa tres primitivas de la siguiente función:



a) $f(x) = 2 \Rightarrow F(x) = 2x + k$

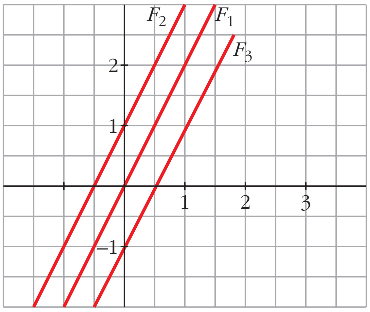
Por ejemplo:

$F_1(x) = 2x$

$F_2(x) = 2x + 1$

$F_3(x) = 2x - 1$

cuyas gráficas son:



b) $f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2 + k$

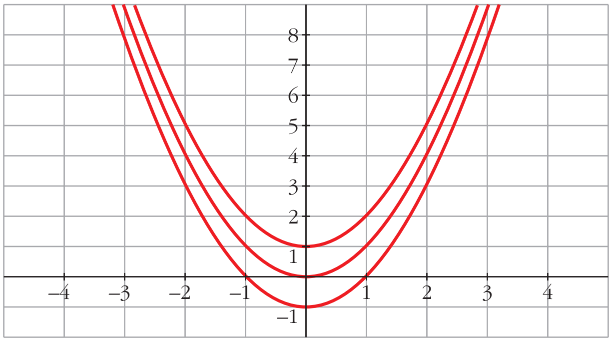
Por ejemplo:

$F_1(x) = x^2$

$F_2(x) = x^2 + 1$

$F_3(x) = x^2 - 1$

cuyas gráficas son:



54 **Sabes que una primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es $F(x) = ln|x|$. ¿Por qué se toma el valor absoluto de x?**

$f(x) = \frac{1}{x}$ está definida para todo $x \neq 0$; y es la derivada de la función:

$$F(x) = \begin{cases} ln\ x & \text{si } x > 0 \\ ln\ (-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es decir, de $F(x) = ln|x|$.

Página 360

55 **En una integral hacemos el cambio de variable $e^x = t$. ¿Cuál es la expresión de dx en función de t?**

$e^x = t \rightarrow x = ln\ t \rightarrow dx = \frac{1}{t}\ dt$

56 **Comprueba que $\int \frac{1}{cos\ x}\ dx = ln|sec\ x + tg\ x| + k$**

Tenemos que probar que la derivada de $f(x) = ln|sec\ x + tg\ x| + k$ es $f'(x) = \frac{1}{cos\ x}$.

Derivamos $f(x) = ln \left| \frac{1 + sen\ x}{cos\ x} \right| + k$:

$$f'(x) = \frac{\frac{cos^2 x + sen\ x(1 + sen\ x)}{cos^2 x}}{\frac{1 + sen\ x}{cos\ x}} = \frac{\frac{cos^2 x + sen\ x + sen^2 x}{cos\ x}}{1 + sen\ x} =$$

$$= \frac{1 + sen\ x}{(1 + sen\ x)\ cos\ x} = \frac{1}{cos\ x}$$

57 **Comprueba que** $\int \frac{1}{sen\ x\ cos\ x}\, dx = ln|tg\ x| + k$

Tenemos que comprobar que la derivada de la función $f(x) = ln|tg\ x| + k$ es $f'(x) = \frac{1}{sen\ x\ cos\ x}$.

Derivamos $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1/cos^2 x}{tg\ x} = \frac{1/cos^2 x}{sen\ x/cos\ x} = \frac{1}{sen\ x\ cos\ x}$$

58 **Sin utilizar cálculo de derivadas, prueba que:**

$$F(x) = \frac{1}{1 + x^4} \text{ y } G(x) = \frac{-x^4}{1 + x^4}$$

son dos primitivas de una misma función.

Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de una misma función, su diferencia es una constante. Veámoslo:

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{1 + x^4} - \left(\frac{-x^4}{1 + x^4}\right) = \frac{1 + x^4}{1 + x^4} = 1$$

Por tanto, hemos obtenido que: $F(x) = G(x) + 1$

Luego las dos son primitivas de una misma función.

59 **Sean f y g dos funciones continuas y derivables que se diferencian en una constante.**

¿Podemos asegurar que f y g tienen una misma primitiva?

No. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x + 1 \rightarrow F(x) = x^2 + x + k \\ g(x) = 2x + 2 \rightarrow G(x) = x^2 + 2x + c \end{array}\right\}$$

$f(x)$ y $g(x)$ son continuas, derivables y se diferencian en una constante (pues $f(x) = g(x) - 1$).

Sin embargo, sus primitivas, $F(x)$ y $G(x)$, respectivamente, son distintas, cualesquiera que sean los valores de k y c.

60 **Calcula $f(x)$ sabiendo que:**

$$\int f(x)\,dx = ln \frac{|x-1|^3}{(x+2)^2} + c$$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = ln \frac{|x-1|^3}{(x+2)^2} + c$$

Sabemos que $F'(x) = f(x)$.

Por tanto, calculamos la derivada de $F(x)$.

Aplicamos las propiedades de los logaritmos antes de derivar:

$F(x) = 3ln\,|x-1| - 2ln\,(x+2) + c$

$$F'(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2} = \frac{3(x+2)-2(x-1)}{x^2+x-2} = \frac{x+8}{x^2+x-2}$$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{x+8}{x^2+x-2}$.

61 **Las integrales:**

$$\int \frac{(arc\ tg\ x)^2}{1+x^2}\,dx \quad \text{y} \quad \int (tg^3\,x + tg^5\,x)\,dx$$

¿son del tipo $\int f(x)^n f'(x)\,dx$?

En caso afirmativo, identifica, en cada una de ellas, $f(x)$, n y $f'(x)$.

Ambas son del tipo $\int f(x)^n f'(x)\,dx$.

- $\displaystyle\int \frac{(arc\ tg\ x)^2}{1+x^2}\,dx = \int (arc\ tg\ x)^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$

  $f(x) = arc\ tg\ x;\quad n = 2;\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

- $\displaystyle\int (tg^3\,x + tg^5\,x)\,dx = \int tg^3\,x\,(1+tg^2\,x)\,dx$

  $f(x) = tg\ x;\quad n = 3;\quad f'(x) = 1 + tg^2\,x$

PARA PROFUNDIZAR

62 **Para integrar una función cuyo denominador es un polinomio de segundo grado sin raíces reales, distinguiremos dos casos:**

a) Si el numerador es constante, transformamos el denominador para obtener un binomio al cuadrado. La solución será un arco tangente:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

(Completa la resolución).

b) Si el numerador es de primer grado, se descompone en un logaritmo neperiano y un arco tangente:

$$\int \frac{(x+5)\,dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2+2x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{8\,dx}{x^2+2x+3}$$

(Completa su resolución).

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = arc\ tg(x+2) + k$

b) $\displaystyle\int \frac{(x+5)\,dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2+2x+3}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{8\,dx}{x^2+2x+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + 4\int \frac{dx}{(x+1)^2+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + 2\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + 2\sqrt{2}\int \frac{(1/\sqrt{2})\,dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + 2\sqrt{2}\ arc\ tg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$$

63 Observa cómo se resuelve esta integral:

$$I = \int \frac{x+1}{x^3+2x^2+3x}\,dx$$

$$x^3+2x^2+3x = x(x^2+2x+3)$$

La fracción se descompone así: $\displaystyle\frac{x+1}{x^3+2x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}$

Obtenemos: $A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3},\ C = \frac{1}{3}$

Sustituimos: $\displaystyle I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx$

(Completa su resolución).

Completamos la resolución:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+2-4}{x^2+2x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-2}{x^2+2x+3}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+2x+3} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{6}\ln(x^2+2x+3) + \frac{\sqrt{2}}{3}\,arc\ tg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$$

(*) $\left(\text{Ver en el ejercicio 62 apartado b) el cálculo de } \int \frac{dx}{x^2+2x+3}\right)$.

64 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int \frac{2x-1}{x^3+x}\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$

c) $\int \frac{x^2+3x+8}{x^2+9}\,dx$ **d)** $\int \frac{2x+10}{x^2+x+1}\,dx$

e) $\int \frac{2}{x^2+3x+4}\,dx$ **f)** $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

☛ ***e) Multiplica el numerador y el denominador por 4.***

a) $\int \frac{2x-1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}\,dx$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$$

$2x - 1 = A(x^2+1) + Bx^2 + Cx$

Hallamos A, B y C:

$x = 0 \;\to\; -1 = A$

$x = 1 \;\to\; 1 = 2A + B + C \;\to\; 3 = B + C$

$x = -1 \;\to\; -3 = 2A + B - C \;\to\; -1 = B - C$

$\left.\right\}\; A = -1,\; B = 1,\; C = 2$

Por tanto:

$$\int \frac{2x-1}{x^3+x}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{x+2}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int \frac{-1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\,arc\ tg\,x + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+Bx(x+1)+C(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$1 = A(x^2-x+1)+Bx(x+1)+C(x+1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x=-1 & \to & 1=3A & \to \; A=1/3 \\ x=0 & \to & 1=A+C & \to \; C=2/3 \\ x=1 & \to & 1=A+2B+2C & \to \; B=-1/3 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \frac{1/3}{x+1}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{1}{3}ln|x+1| - \frac{1}{6}ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{3}ln|x+1| - \frac{1}{6}ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{4/3}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}ln|x+1| - \frac{1}{6}ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}ln|x+1| - \frac{1}{6}ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\,arc\,tg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

c) $\int \frac{x^2+3x+8}{x^2+9}\,dx = \int \left(1+\frac{3x-1}{x^2+9}\right)dx = x + \int \frac{3x}{x^2+9}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+9} =$

$$= x + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - \int \frac{1/9}{(x/3)^2+1}\,dx =$$

$$= x + \frac{3}{2} ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\ arc\ tg\left(\frac{x}{3}\right) + k$$

d) $\int \frac{2x+10}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{2x+1+9}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + 9\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx =$

$$= ln(x^2+x+1) + 9\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= ln(x^2+x+1) + 6\sqrt{3}\int \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= ln(x^2+x+1) + 6\sqrt{3}\ arc\ tg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

e) $\int \frac{2}{x^2+3x+4}\,dx = \int \frac{8}{4x^2+12x+16}\,dx = \int \frac{8}{(2x+3)^2+7}\,dx =$

$$= \int \frac{8/7}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right)^2+1}\,dx = \frac{8}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\int \frac{2/\sqrt{7}}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{4\sqrt{7}}{7}\ arc\ tg\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right) + k$$

f) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + Cx(x+1)^2 + D(x+1)^2$$

Hallamos A, B, C y D:

$$\left.\begin{array}{lll} x=-1 & \rightarrow & 1 = 2B \quad \rightarrow \quad B = 1/2 \\ x=0 & \rightarrow & 1 = A+B+D \\ x=1 & \rightarrow & 1 = 4A+2B+4C+4D \\ x=-2 & \rightarrow & 1 = -5A+5B-2C+D \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = 1/2 \\ C = -1/2 \\ D = 0 \end{array}$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\,(x^2+1)} = \int \left(\frac{1/2}{x+1} + \frac{1/2}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4} ln(x^2+1) + k$$

Página 361

65 **Se llama ecuación diferencial de primer orden a una ecuación en la que, además de x e y, figura también y'. Resolverla es buscar una función $y = f(x)$ que verifique la ecuación.**

Por ejemplo, resolvamos $x\,y^2 + y' = 0$:

$$y' = -x\,y^2 \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -x\,y^2 \;\rightarrow\; dy = -x\,y^2\,dx$$

Separamos las variables:

$$\frac{dy}{y^2} = -x\,dx \;\rightarrow\; \int \frac{dy}{y^2} = \int (-x)\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{2} + k \;\rightarrow\; y = \frac{2}{x^2 - 2k}$$

Hay infinitas soluciones. Busca la que pasa por el punto (0, 2) y comprueba que la curva que obtienes verifica la ecuación propuesta.

- Buscamos la solución que pasa por el punto (0, 2):

$$y = \frac{2}{x^2 - 2k} \;\rightarrow\; 2 = \frac{2}{-2k} \;\Rightarrow\; -4k = 2 \;\Rightarrow\; k = \frac{-1}{2}$$

Por tanto: $y = \dfrac{2}{x^2+1}$

- Comprobamos que verifica la ecuación $xy^2 + y' = 0$:

$$xy^2 + y' = x\left(\frac{2}{x^2+1}\right)^2 - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = x \cdot \frac{4}{(x^2+1)^2} - \frac{4x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2} - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0$$

66 **Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:**

a) $y\,y' - x = 0$

b) $y^2\,y' - x^2 = 1$

c) $y' - x\,y = 0$

d) $y'\sqrt{x} - y = 0$

e) $y'\,e^y + 1 = e^x$

f) $x^2\,y' + y^2 + 1 = 0$

☛ ***En todas ellas, al despejar y' se obtiene en el segundo miembro el producto o el cociente de dos funciones, cada una de ellas con una sola variable.***

a) $y y' - x = 0$

$$y' = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = x\,dx \Rightarrow \int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + k \Rightarrow y^2 = x^2 + 2k \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + 2k}$$

b) $y^2 y' - x^2 = 1$

$$y' = \frac{1 + x^2}{y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + x^2}{y^2} \Rightarrow y^2\,dy = (1 + x^2)\,dx$$

$$\int y^2\,dy = \int (1 + x^2)\,dx \Rightarrow \frac{y^3}{3} = x + \frac{x^3}{3} + k \Rightarrow y^3 = 3x + x^3 + 3k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{3x + x^3 + 3k}$$

c) $y' - x y = 0$

$$y' = xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = x\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$$

$$ln\,|y| = \frac{x^2}{2} + k \Rightarrow |y| = e^{(x^2/2) + k} \Rightarrow y = \pm e^{(x^2/2) + k}$$

d) $y' \sqrt{x} - y = 0$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$ln\,|y| = 2\sqrt{x} + k \Rightarrow |y| = e^{2\sqrt{x} + k} \Rightarrow y = \pm e^{2\sqrt{x} + k}$$

e) $y' e^y + 1 = e^x$

$$y' = \frac{e^x - 1}{e^y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - 1}{e^y}$$

$$e^y\,dy = (e^x - 1)\,dx \Rightarrow \int e^y\,dy = \int (e^x - 1)\,dx$$

$$e^y = e^x - x + k \Rightarrow y = ln\,|e^x - x + k|$$

f) $x^2 y' + y^2 + 1 = 0$

$$y' = \frac{-1 - y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(1 + y^2)}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{-1}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \frac{-1}{x^2}\,dx \Rightarrow arc\ tg\ y = \frac{1}{x} + k$$

$$y = tg\left(\frac{1}{x} + k\right)$$

Página 361

AUTOEVALUACIÓN

Resuelve las integrales siguientes:

1. $\displaystyle\int (\cos x + tg\ x)\ dx$

$$\int (\cos x + tg\ x)\ dx = \int \cos x\ dx + \int \frac{sen\ x}{\cos x}\ dx = sen\ x - \ln |\cos x| + k$$

2. $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}\right) dx$

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}\right) dx = 2\ln |x| + \frac{x^{3/2}}{3/2} = 2\ln |x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$$

3. $\displaystyle\int x \sqrt[3]{2x^2 + 1}\ dx$

$$\int x \sqrt[3]{2x^2 + 1}\ dx = \frac{1}{4}\int 4x\,(2x^2 + 1)^{1/3}\ dx = \frac{1}{4}\,(2x^2 + 1)^{4/3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}\sqrt[3]{(2x^2 + 1)^4} + k$$

4. $\displaystyle\int \frac{tg^2\ x}{\cos^2 x}\ dx$

$$\int \frac{tg^2\ x}{\cos^2 x}\ dx = \frac{tg^3\ x}{3} + k$$

5. $\displaystyle\int x\ arc\ tg\ x\ dx$

$$\int x\ arc\ tg\ x\ dx \overset{(1)}{=} \frac{x^2}{2}\ arc\ tg\ x - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{x^2}{1 + x^2}\ dx}_{I_1} \overset{(2)}{=} \frac{x^2}{2}\ arc\ tg\ x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ arc\ tg\ x + k$$

(1) Por partes:

$$\begin{cases} arc\ tg\ x = u \ \rightarrow\ \dfrac{1}{1 + x^2}dx = du \\ x\ dx = dv \ \rightarrow\ \dfrac{x^2}{2} = v \end{cases}$$

(2) $\displaystyle I_1 = \int \frac{x^2}{1 + x^2}\ dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = x - arc\ tg\ x$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, sen\,(ln\, x)\, dx$

$$\int \frac{1}{x}\, sen\,(ln\, x)\, dx = -cos\,(ln\, x) + k$$

7. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 4x - 21}\, dx$

$I = \displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 4x - 21}\, dx$. Descomponemos en fracciones simples:

$x^2 + 4x - 21 = 0$ ⟨ $x = -7$, $x = 3$

$$\frac{x}{(x-3)(x+7)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+7} \rightarrow x = A(x+7) + B(x-3) \rightarrow A = \frac{3}{10},\ B = \frac{7}{10}$$

$$I = \int \frac{3/10}{x-3}\, dx + \int \frac{7/10}{x+7}\, dx = \frac{3}{10}\, ln\,|x-3| + \frac{7}{10}\, ln\,|x+7| + k$$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2 + 4}\, dx$

$$\int \frac{1}{3x^2+4}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{3x^2}{4} + 1}\, dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2 + 1}\, dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\, arc\ tg\, \frac{\sqrt{3}x}{2} + k$$

9. Resuelve, por el método de sustitución, la integral: $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx$

$$I = \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx$$

Hacemos el cambio $\sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = 2t\, dt$

$$I = \int \frac{1+t^2}{1+t}\cdot 2t\, dt = 2\int \frac{t+t^3}{1+t}\, dx \overset{(1)}{=} 2\int\left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1}\right) dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2ln\,|t+1|\right)$$

(1) Dividimos $(t^3 + t) : (t + 2)$ y expresamos de la forma:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \text{resto}$$

Deshaciendo el cambio: $I = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4ln\left(\sqrt{x} + 1\right) + k$

10. **Aplica la integración por partes para calcular $\int \cos(\ln x)\, dx$.**

$I = \int \cos(\ln x)\, dx$

$$\begin{cases} \cos(\ln x) = u \;\rightarrow\; -\frac{1}{x}\,\text{sen}(\ln x)\, dx = du \\ dx = dv \;\rightarrow\; x = v \end{cases}$$

$$I = x\cos(\ln x) + \underbrace{\int \text{sen}(\ln x)\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} \text{sen}(\ln x) = u \;\rightarrow\; \frac{1}{x}\cos(\ln x)\, dx = du \\ dx = dv \;\rightarrow\; x = v \end{cases}$$

$$I_1 = x\,\text{sen}(\ln x) - \underbrace{\int \cos(\ln x)\, dx}_{I}$$

$$I = x\cos(\ln x) + x\,\text{sen}(\ln x) - I \;\rightarrow\; I = \frac{x\cos(\ln x) + x\,\text{sen}(\ln x)}{2} + k$$

11. **De la función $f(x)$, se sabe que:**

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2};\; f(2) = 0$$

a) Determina f.

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

a) $f(x) = \int \frac{3}{(x+1)^2}\, dx = 3\int (x+1)^{-2}\, dx = \frac{3(x+1)^{-1}}{-1} + k = \frac{-3}{x+1} + k$

$f(2) = \frac{-3}{2+1} + k = -1 + k \;\rightarrow\;$ Como $f(2) = 0$, $-1 + k = 0 \;\rightarrow\; k = 1$

$f(x) = \frac{-3}{x+1} + 1 = \frac{x-2}{x+1}$

b) $g(x) = \int \frac{x-2}{x+1}\, dx = \int \left(1 + \frac{-3}{x+1}\right) dx = x - 3\ln|x+1| + k$

$g(0) = 0 - 3\ln|0+1| + k = k \;\rightarrow\;$ Como $g(0) = 1$, $k = 1$.

La primitiva de f que pasa por (0, 1) es $g(x) = x - 3\ln|x+1| + 1$.

12. **De una función f derivable en $\mathbb{R}$, sabemos que:**

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Halla f sabiendo que $f(1) = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \int (2x-1)\, dx & \text{si } x < 0 \\ \int -1\, dx & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x + k & \text{si } x < 0 \\ -x + k' & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que f sea derivable en $x = 0$ y, por tanto, en $\mathbb{R}$, debe ser continua y, para ello, $k = k'$.

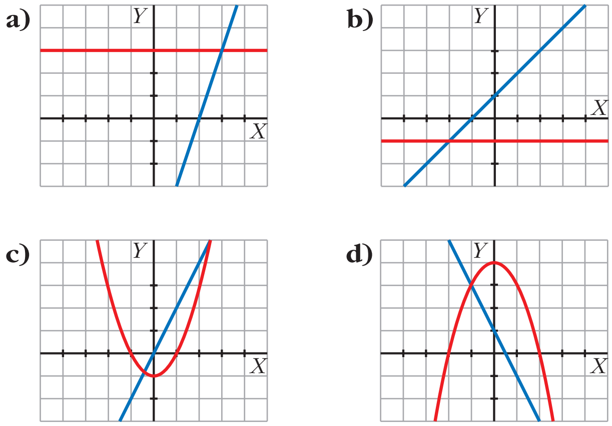
Además, $f(1) = -1 + k' = 2 \rightarrow k' = 3 \rightarrow k = 3$

Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & \text{si } x < 0 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

13. **¿Cuáles de los siguientes apartados representan la gráfica de una función $f(x)$ y la de una de sus primitivas $F(x)$?**

Justifica tu respuesta.



a) Las funciones representadas son $y = 3$ e $y = 3x - 6$, que cumplen:

$$\int 3\, dx = 3x + k$$

Por tanto, $f(x) = 3$, y $F(x) = 3x - 6$ es una primitiva de f.

b) Las funciones son:

$y = -1$ e $y = x + 1 \rightarrow \int -1\, dx = -x + k$

No corresponden a una función y su primitiva.

c) Las funciones son $y = x^2 - 1$ e $y = 2x$.

$\int 2x\, dx = x^2 + k$. Por tanto, $f(x) = 2x$, y una de sus primitivas es $F(x) = x^2 - 1$.

d) Las funciones son $y = -x^2 - 1 + 4$ e $y = -2x + 1 \rightarrow \int -2x + 1\, dx = -x^2 + x + k$

No corresponden a una función y su primitiva.